Mathematische Physik I

Übungsblatt 7

Aufgabe 28: Der Homotopie-Operator

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $[0,1] \times M$ die Produktmannigfaltigkeit mit Rand $(\{0\} \times M) \cup (\{1\} \times M) \cup ((0,1) \times \partial M)$. Es bezeichnen $\iota_0 : M \to \{0\} \times M$ und $\iota_1 : M \to \{1\} \times M$ die natürlichen Injektionen.

a) Mache dir klar, dass sich jedes $\omega \in \Lambda_p([0,1] \times M)$ in eindeutiger Weise aufspalten läßt in

$$\omega = \mathrm{d}t \wedge \omega_M(t) + \omega_0 \,,$$

wobei $\omega_M : [0,1] \to \Lambda_{p-1}(M)$ glatt und $\omega_0 \in \Lambda_p([0,1] \times M)$ lokal von der Form

$$\omega_0 = \sum_I c_I(t,q)\, \mathrm{d}q^I$$

ist. Hier bezeichnet $I = (i_1, \dots, i_p)$ einen geordneten Multiindex, $\mathrm{d}q^I = \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}q^{i_p}$ und die $\mathrm{d}q^i$ sind Koordinatenformen auf M.

b) Man definiert nun $K : \Lambda_p([0,1] \times M) \to \Lambda_{p-1}(M)$ durch

$$\omega = \mathrm{d}t \wedge \omega_M(t) + \omega_0 \mapsto K\omega := \int_0^1 \mathrm{d}t \wedge \omega_M := \int_0^1 \omega_M(t)\, \mathrm{d}t \,.$$

Zeige, dass

$$\mathrm{d} \circ K + K \circ \mathrm{d} = \iota_1^* - \iota_0^* \,.$$

Aufgabe 29: Integral geschlossener Formen über diffeotope Abbildungen

Es seien $N_0 = \psi_0(N) \subset M$ und $N_1 = \psi_1(N) \subset M$ jeweils das glatte Bild einer p-dimensionalen, kompakten, orientierbaren, randlosen Mannigfaltigkeit N in der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, also $\psi_0 : N \to M$ und $\psi_1 : N \to M$ glatte Abbildungen. Es seien ψ_0 und ψ_1 diffeotop, d.h. es gibt ein glattes $F : [0,1] \times N \to M$ so, dass

$$\psi_0 = F \circ \iota_0 : N \to N_0 \quad \text{und} \quad \psi_1 = F \circ \iota_1 : N \to N_1 \,,$$

wobei ι_0 und ι_1 jeweils die Injektion von N in $\{0\} \times N$ bzw. $\{1\} \times N$ ist. Zeigen Sie, dass für jede geschlossene p-Form $\omega \in \Lambda_p(M)$ gilt:

$$\int_{N_0} \omega = \int_{N_1} \omega \,,$$

wobei

$$\int_{N_j} \omega := \int_N \psi_j^* \omega \,.$$

Überlege dir, wie die Aussage und der Beweis für eine Mannigfaltigkeit N mit Rand zu modifizieren sind.

Hinweis: Die Aussage ist per Definition äquivalent zu $\int_N \psi_0^*\omega = \int_N \psi_1^*\omega$. Um letzteres zu zeigen, betrachte die Form $F^*\omega \in \Lambda_p([0,1] \times N)$ und wende den Homotopie-Operator $\mathrm{d} \circ K + K \circ \mathrm{d}$ aus Aufgabe 28 darauf an, um zu folgern, dass $(\psi_0^* - \psi_1^*)\omega$ exakt ist. Dann liefert der Satz von Stokes die gewünschte Aussage.

Aufgabe 30: Zerlegung der Eins

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Zeige, dass f unendlich oft differenzierbar ist.

b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t-k)$, $g(t) := f(t)/F(t)$ und $g_k(t) := g(t-k)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass $(g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Zerlegung der Eins ist mit $\operatorname{supp}(g_k) = [k-1, k+1]$.

c) Für $q \in \mathbb{Z}^n$ und $\epsilon > 0$ setze man $\alpha_{q,\epsilon} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \Pi_{j=1}^n g(\epsilon^{-1}x_j - q_j)$. Zeige, dass $(\alpha_{q,\epsilon})_{q\in\mathbb{Z}^n}$ eine Zerlegung der Eins ist. Bestimme weiter den Träger von $\alpha_{q,\epsilon}$.

d) Zeige nun den folgenden Satz:
Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U$ kompakt, so existiert eine unendlich oft differenzierbare Funktion $h : U \to [0,1]$, so dass $\operatorname{supp}(h) \subset U$ kompakt ist und $h \equiv 1$ auf K.
Hinweis: Setze $\epsilon = \operatorname{dist}(\partial U, K)$.

Aufgabe 31:

Sei $\omega \in \Lambda(\mathbb{R}^3)$, $\omega = \omega_i(x)\mathrm{d}x^i$ und u, v Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

Sei $\mathrm{d}\omega_x(u,v) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\gamma \omega$, wobei der Weg γ das Parallelogramm, welches bei x durch die beiden Vektoren εu und εv aufgespannt wird, (also mit den Ecken x, $x+\varepsilon u$, $x+\varepsilon v$, $x+\varepsilon(u+v)$).

Zeige, dass für Parallelogramme Π mir Parametrisierung

$$\phi(s,t) = x + su + tv, \qquad (s,t) \in [0,1]^2,\ u, v \in \mathbb{R}^3$$

der Satz von Stokes gilt:

$$\int_\Pi \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\Pi} \omega.$$

Zeige weiter, dass für $\omega = \omega_i(x)\mathrm{d}x^i$ folgt, dass

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i.$$

Hinweis:

$$\int_\Pi \mathrm{d}\omega = \int_{[0,1]^2} \mathrm{d}\omega(\phi_s, \phi_t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$