Mathematische Physik I

Übungsblatt 8

Aufgabe 32: Symplektische Endomorphismen
Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum.

a) Zeige: Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ ist genau dann symplektisch, wenn

$$A^T J A \;=\; J$$

gilt. Hierbei sind $A_{ij} = f_i(e_j)$ und $J_{ij} = \omega(e_i, e_j)$ die darstellenden Matrizen bzgl. einer beliebigen Basis $(e_i)_{i=1}^n$ von V.

b) Zeige, dass ein linearer Hamiltonscher Fluss $\Phi_t^{X_H} : V \to V$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ symplektisch ist.

c) Zeige, dass die symplektischen Endomorphismen von (V, ω) eine Gruppe bilden.

Aufgabe 33: Magnetische Felder in der Hamiltonschen Mechanik
Sei $V = \mathbb{R}^6$ zunächst ausgestattet mit der kanonischen symplektischen Form ω_0. Die Hamiltonfunktion für ein geladenes Teilchen im konstanten Magnetfeld $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ ist

$$H(q,p) = \tfrac{1}{2}\left(p + \tfrac{1}{2}Bq\right)^2 := \tfrac{1}{2}\langle p + \tfrac{1}{2}Bq, p + \tfrac{1}{2}Bq\rangle_{\mathbb{R}^3}\,,$$

wobei B die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -B_3 & B_2 \\ B_3 & 0 & -B_1 \\ -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Bestimme die zugehörigen Hamiltonschen Gleichungen.
Betrachte die lineare Koordinatentransformation

$$T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6\,, \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} q \\ p + \frac{1}{2}Bq \end{pmatrix}$$

und schreibe die Hamiltonschen Gleichungen in den neuen Variablen $(\tilde{q}, \tilde{p})$.
Bestimme nun eine symplektische Form ω_B auf $\mathbb{R}^6$ so, dass $T : (\mathbb{R}^6, \omega_0) \to (\mathbb{R}^6, \omega_B)$ eine symplektische Abbildung ist.
Berechne schließlich die Hamiltonschen Gleichungen zur Hamiltonfunktion

$$\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) = \tfrac{1}{2}|\tilde{p}|^2$$

bezüglich der neuen symplektischen Form ω_B.

Aufgabe 34: Die Unfrisierbarkeit des Igels
Zeige, dass man einen Igel nicht frisieren kann, also die Gültigkeit der folgenden Aussage: Auf der n-dimensionalen Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ hat für gerade Dimenison n jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathcal{T}_0^1(S^n)$ mindestens eine Nullstelle.
Anleitung: Nehme an, es gebe ein X ohne Nullstelle, dann kann man es o.B.d.A. auf $\|X\|_{\mathbb{R}^{n+1}} = 1$ normieren. Verwende die Eigenschaft $\langle X(x), x\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$ um eine Diffeotopie $F : [0,1] \times$

$S^n \to S^n$ zwischen $\psi_0 : S^n \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\psi_0(x) = x$ und $\psi_1 : S^n \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\psi_1(x) = -x$, zu konstruieren. Finde eine nirgends verschwindende Volumenform ω auf S^n, z.B. unter Verwendung des äußeren Normalenfeldes $n(x) = x$ an S^n und der kanonischen Volumenform ε auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Zeige schließlich, dass ψ_1 für gerades n die Orientierung umkehrt, also

$$\int_{S^n} \omega = \int_{S^n} \psi_0^* \omega = - \int_{S^n} \psi_1^* \omega \, ,$$

und führe dies zum Widerspruch.

Aufgabe 35:

Sei $u \in \mathrm{sp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$. Zeige, dass wenn λ ein k-fach entarteter Eigenwert von u ist, dass automatisch auch $-\lambda$, $\bar{\lambda}$, $-\bar{\lambda}$ k-fach entartete Eigenwerte von u sind. Zeige, dass 0 geradzahlig entartet ist.