Mathematische Physik I

Übungsblatt 9

Aufgabe 36: Lie-Klammer und Vertauschbarkeit von Flüssen
Seien $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$ vollständige Vektorfelder mit $[X, Y] = 0$. Zeige, dass dann auch die zugehörigen Flüsse vertauschen, also, dass

$$\Phi_t^X \circ \Phi_s^Y = \Phi_s^Y \circ \Phi_t^X \qquad \text{für alle } t, s \in \mathbb{R}\,.$$

Gehe dazu folgendermaßen vor:

a) Zeige, dass $\Phi_s^{Y*}X = X$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und analog, dass $\Phi_t^{X*}Y = Y$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Zeige , dass für jedes $g \in C_0^\infty(M)$ die Funktionen $a(t, s) := g \circ \Phi_t^X \circ \Phi_s^Y$ und $b(t, s) := g \circ \Phi_s^Y \circ \Phi_t^X$ die gleichen Differentialgleichungen bezüglich s und t erfüllen.

c) Folgere aus b) die Behauptung.

Aufgabe 37: Poissonklammer und kanonische Transformationen
Seien M_1 und M_2 symplektische Mannigfaltigkeiten und $\psi : M_1 \to M_2$ eine kanonische Transformation. Zeige, dass

$$\psi^*(\{f, g\}_{M_2}) \;=\; \{\psi^* f, \psi^* g\}_{M_1}\,.$$

Aufgabe 38: Die Liouvillegleichung
Sei Φ_t^H der von X_H erzeugte Hamiltonsche Fluss auf der symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) und $g, H \in C^\infty(M)$. Zeige, dass $g(t) := g \circ \Phi_t^H$ die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, g(t) = \{g(t), H\}$$

löst.

Aufgabe 39:

Sei $M = \mathbb{R}^3$. Im Folgenden behandeln wir ein Beispiel, in dem zwei Vektorfelder die Frobeniusbedingung verletzen, so dass keine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M gefunden werden kann, deren Tangentialraum von den beiden Vektoren aufgespannt wird.

a) Zeige, dass die zwei Vektorfelder $X = -z\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial z}$ die Frobenius-Bedingung verletzen, d.h. $[X, Y] \notin \operatorname{span}\{X, Y\}$.

b) Finde eine 1-Form ω, so dass $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ und zeige, dass $\mathrm{d}\omega \wedge \omega \neq 0$.

c) Seien Φ_t^X, Φ_t^Y die durch X und Y erzeugten Flüße. Zeige, dass die Abbildung $(t_1, t_2, t_3) \mapsto \Phi_{t_3}^Y \circ \Phi_{t_2}^X \circ \Phi_{t_1}^Y(0)$ die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ auf sich selbst abbildet.
Dies zeigt, dass diese Menge keine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit besitzt, die unter den von X und Y erzeugten Flüssen invariant gelassen wird.

Aufgabe 40: Impuls- und Drehimpulserhaltung
Sei $M = \mathbb{R}^3$, $T^*(M) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $H(q, p) = |p|^2$ und $G_1 = p_1$, $G_2 = p_1 q_2 - q_1 p_2$. Berechne die Flüße der Vektorfelder $X_{G_1} = J\nabla G_1$ und $X_{G_2} = J\nabla G_2$ und zeige dass diese H invariant lassen.