Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Silvia Freund, Sebastian Debreli-Bölzle & Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 12/13

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 9 (Abgabe am 17.12.2012)

Aufgabe 45 (10 Punkte)

Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen

$$x_1\mathrm{CO}_2 + x_2\mathrm{H}_2 \longrightarrow x_3\mathrm{CH}_4 + x_4\mathrm{H}_2\mathrm{O}$$

$$y_1\mathrm{H}(\mathrm{CH}_2)_n\mathrm{CH}_2\mathrm{OH} + y_2\mathrm{O}_2 \longrightarrow y_3\mathrm{CO}_2 + y_4\mathrm{H}_2\mathrm{O}$$

(für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$) ein lineares Gleichungssystem für die Werte x_i bzw. y_j aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahle von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle x_i bzw. y_j positive ganze Zahlen sind.

Aufgabe 46 (10 Punkte)

a) In Aufgabe 17 haben Sie die ersten Fibonacci-Zahlen F_t berechnet. Plotten Sie nun mit Matlab die Verhältnisse $v_t := F_{t+1}/F_t$ für $t = 1, \dots, 1000$.

b) In Teil a) haben wir mithilfe von Matlab beobachtet, dass das Verhältnis F_n/F_{n-1} zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen offensichtlich einem Grenzwert zustrebt. Wir nehmen nun an, dass dieser Grenzwert existiert und nennen ihn α, d.h.

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$

Bestimmen Sie α wie folgt:
- Dividieren Sie die Rekursionsvorschrift $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ durch F_{n-1}.
- Bilden Sie den Limes $n \to \infty$, um eine Gleichung für α zu erhalten.
- Lösen Sie diese (quadratische) Gleichung für α.
- Welche der beiden Lösungen ist die richtige und warum?

c) Zeichnen Sie mit Matlab in das Diagramm aus Teil a) nun zum Vergleich die waagerechte Gerade $y = \alpha$ ein.

Aufgabe 47 (10 Punkte)

Entscheiden Sie mit Hilfe der Sätze und Beispiele aus der Vorlesung, ob die folgenden Zahlenfolgen konvergieren, und bestimmen Sie ggf. ihre Grenzwerte für $n \to \infty$.

a) $\dfrac{4n}{5n+7}$ b) $\dfrac{5n(-1)^n}{3n+1}$ c) $\dfrac{n-6}{2n+(-1)^n}$ d) $\dfrac{-n^2}{1+20n-5n^2}$

e) $\dfrac{2n+n^4}{n-n^3}$ f) $\sin\left(\dfrac{\pi+3n\pi}{2n}\right)$ g) $\dfrac{\tan(\frac{2}{n})}{\frac{2}{n}}$

Aufgabe 48 (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeichen Sie (mit MATLAB oder von Hand) die Graphen von f_1, f_2, f_4 und f_8 für $|x| \leq 1{,}1$.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -1 < x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad x = 1 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie damit für $|x| \leq 1$ die Grenzfunktion $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Für welche x ist $f(x)$ stetig?

Aufgabe 49 (10 Punkte)

Der antike Philosoph Zenon von Elea (490–430 v. Chr.) glaubte die Widersprüchlichkeit der Zeit so beweisen zu können: Achilles (bekannt für seine Schnelligkeit) tritt ein Wettrennen gegen eine Schildkröte an. Die Schildkröte läuft hundertmal langsamer als Achilles, erhält allerdings 10 Meter Vorsprung. Hat Achilles die ersten 10 Meter überwunden, so ist die Schildkröte bereits 10 cm weiter. Hat Achilles auch diese 10 cm zurückgelegt, so ist die Schildkröte doch schon 1 mm weiter und so fort. So kann Achilles die Schildkröte nie einholen.

Womit Zenon nicht rechnete ist, dass eine unendliche Reihe konvergent sein (und damit einen endlichen Wert haben) kann. Bestimmen Sie die Position x_0 der Rennbahn, an der Achilles die Schildkröte überholt, auf zweierlei Weise,

a) einmal mit Hilfe der geometrischen Reihe, und

b) ein zweites Mal, indem Sie Gleichungen für die Position $x_A(t)$ des Achilles und die Position $x_S(t)$ der Schildkröte als Funktion der Zeit aufstellen und den Schnittpunkt aus der Gleichung $x_A(t) = x_S(t)$ ermitteln.