Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 12/13
Silvia Freund, Sebastian Debreli-Bölzle & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 12 (Abgabe am 14.01.2013)

Aufgabe 56 (10 Punkte)
Bestimmen Sie (für $a \in \mathbb{R}$):

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-x^4}{x^4}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-2}^1 (3-x)^2\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2ax}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \log x\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_0^1 8^x\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_0^2 3x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 57 (10 Punkte)
Zeigen Sie:

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

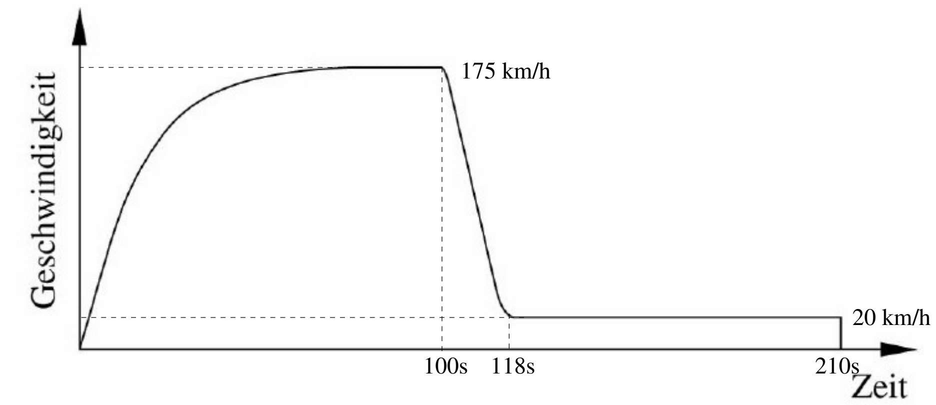
Hinweis: Verwenden Sie das Additionstheorem des Sinus, um den Integranden durch $\sin(2nx)$ auszudrücken.

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n \neq m.$

Hinweis: Integrieren Sie zweimal partiell.

Aufgabe 58 (10 Punkte)
In der Vorlesung haben wir uns überlegt, dass der untenstehende Graph den Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf bei einem Fallschirmsprung beschreibt.

a) Welche Größe wird durch die Fläche zwischen dem Graph und der Zeitachse beschrieben?
b) Zeichnen Sie ein, wie der Graph verläuft, wenn sich der Fallschirm nicht öffnet.
c) Zu welchem Zeitpunkt erreicht der Fallschirmspringer in diesem Fall den Boden?



Aufgabe 59 (10 Punkte)

Eine Wasserquelle versiegt allmählich. Der Wasseraustritt geht innerhalb von 2 Wochen von $60\,\ell/\text{min}$ auf $4\,\ell/\text{min}$ zurück. Wieviel Wasser ist in dieser Zeit ausgetreten, wenn wir annehmen, dass der Wasseraustritt pro Zeiteinheit als Funktion der Zeit exponentiell abnimmt?

Aufgabe 60 (10 Punkte)

Wir bestimmen die Fourier-Reihe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & , \quad -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ x & , \quad |x| \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & , \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases} \quad \text{, periodisch fortgesetzt.}$$

a) Zeichnen Sie den Graph von f auf $[-\pi, \pi]$ (von Hand oder mit MATLAB).

```
x1=-pi:.01:-pi/2; x2=-pi/2:.01:pi/2; x3=pi/2:.01:pi;
plot(x1,-pi-x1); hold on; plot(x2,x2); plot(x3,pi-x3); hold off
```

b) Begründen Sie, dass $a_0 = 0$.
c) Begründen Sie, dass $a_n = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$.
d) Begründen Sie, dass $b_{2n} = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$.
e) Begründen Sie, dass

$$b_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin\big((2n+1)x\big)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

f) Berechnen Sie die b_{2n+1}.
g) Zeichnen Sie die Funktionen

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} b_{2n+1} \sin\big((2n+1)x\big)\,, \quad N = 0, 1, 2\,,$$

in den Plot aus Teil a ein.

HINWEIS: Für die Aufgabenteile b - e müssen Sie nichts rechnen.

Aufgabe 61 (10 Zusatzpunkte)

Erreichen Sie bis spätestens 26.01.13 auf `www.khanacademy.org` *Proficiency* in den *Skills Limits 2*, *Derivative intuition*, *Power rule*, *Chain rule 1* und *Product rule*.

HINWEISE: (i) Siehe Aufgabe 11. (ii) $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$.