Universität Tübingen, Mathematisches Institut — Wintersemester 12/13

Sebastian Debreli-Bölzle, Silvia Freund & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

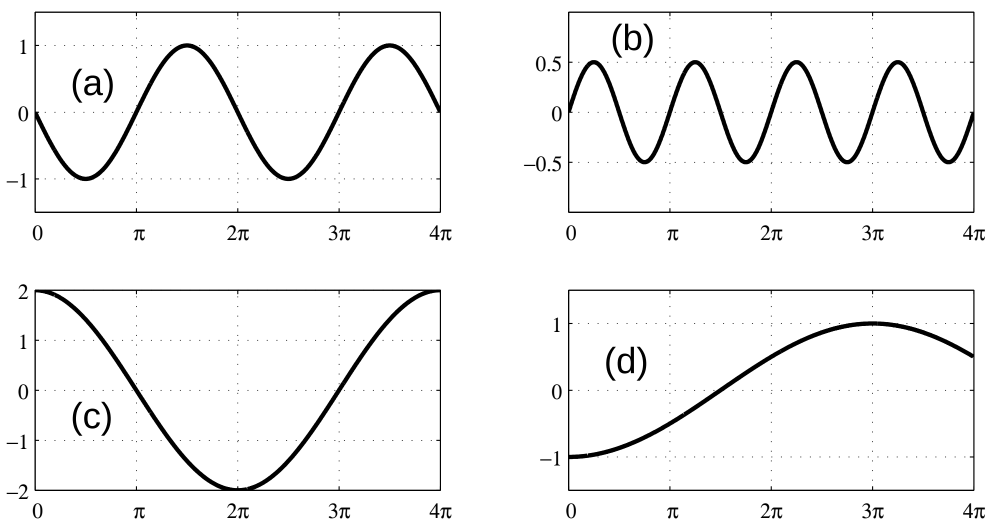
Klausur am 11.2.2013

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 82 Punkte erreichbar, 66 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 33 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)
In den folgenden Diagrammen sind jeweils Graphen von Funktionen der Form $a\sin(bx)$ oder $a\cos(bx)$, $a, b \in \mathbb{R}$, dargestellt. Geben Sie diese Funktionen an.



Aufgabe 2 (4 Punkte)
Gnurpen essen gerne Xarg. Drei Gnurpen vertilgen in 30min 900g Xarg. Wieviel Xarg verzehren 5 Gnurpen in 20min? Nehmen Sie an, dass alle Gnurpen stets gleich schnell essen.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Lösen Sie die folgende Gleichung nach α auf. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

$$\log 30 = \log 15 + \alpha \log 64$$

Aufgabe 4 (5+2+2+2 = 11 Punkte)

In englischen Wäldern kommt neben dem dort ursprünglich heimischen Eichhörnchen (*Sciurus vulgaris*) auch das Ende des 19. Jahrhunderts aus Nordamerika eingeführte Grauhörnchen (*Sciurus carolinensis*) vor. Wir unterteilen die Wälder Englands in gleich große Gebiete und bezeichnen mit $R^{(t)}$ die Anzahl dieser Gebiete, die im Jahr t ausschließlich von Eichhörnchen besiedelt sind, mit $G^{(t)}$ diejenigen, in denen ausschließlich Grauhörnchen vorkommen und mit $B^{(t)}$ diejenigen, in denen beide Arten koexistieren.

In der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts beobachtete man, dass von Gebieten, in denen im Jahr t ausschließlich Eichhörnchen vorkamen, im Jahr $t+1$ wieder 88% nur von Eichhörnchen besiedelt waren, 2% dagegen nur von Grauhörnchen, während in 10% der Gebiete beide Arten vorkamen. Analog waren von den reinen Grauhörnchen-Gebieten im Folgejahr 93% wieder nur von Grauhörnchen besiedelt, 4% nur von Eichhörnchen und 3% von beiden. Gebiete, in denen im Jahr t beide Arten vorkamen, waren auch im Folgejahr zu 94% wieder von beiden Arten besiedelt, während 6% wieder an die Eichhörnchen zurückgingen.

Wir modellieren den Wettbewerb der beiden Arten durch

$$\vec{N}^{(t+1)} = W\vec{N}^{(t)} \qquad \text{mit} \qquad \vec{N}^{(t)} = \begin{pmatrix} R^{(t)} \\ G^{(t)} \\ B^{(t)} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad W = \begin{pmatrix} 0{,}88 & 0{,}04 & \square \\ \square & 0{,}93 & \square \\ \square & 0{,}03 & \square \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die vollständige Übergangsmatrix W an, d.h. einschließlich der oben fehlenden Einträge.

Die Besiedlung im Jahr $t = 0$ sei durch den Vektor $\vec{N}^{(0)} = \begin{pmatrix} 6928 \\ 528 \\ 1544 \end{pmatrix}$ gegeben. Die Übergangsmatrix haben Sie in MATLAB als `W` eingegeben. Sie führen folgende Befehle aus:

```
>> N=[6928;528;1544];
>> W\N

ans =

   1.0e+03 *

    7.8000
    0.4000
    0.8000

>> W*N

ans =

   1.0e+03 *

    6.2104
    0.6296
    2.1600
```

```
>> W*(10)*N

ans =

   1.0e+04 *

    6.2104
    0.6296
    2.1600

>> W^(10)*N

ans =

   1.0e+03 *

    3.4577
    0.9383
    4.6040
```

```
>> W.^(10)*N

ans =

   1.0e+03 *

    1.9295
    0.2555
    0.8316

>> W^(-1)*N

ans =

   1.0e+03 *

    7.8000
    0.4000
    0.8000
```

b) Wieviele Gebiete sind nach einem Jahr (d.h. zur Zeit $t = 1$) ausschließlich von Grauhörnchen besiedelt?

c) Wieviele Gebiete sind nach 10 Jahren ausschließlich von Grauhörnchen besiedelt?

d) Wieviele Gebiete waren vor einem Jahr ausschließlich von Eichhörnchen besiedelt?

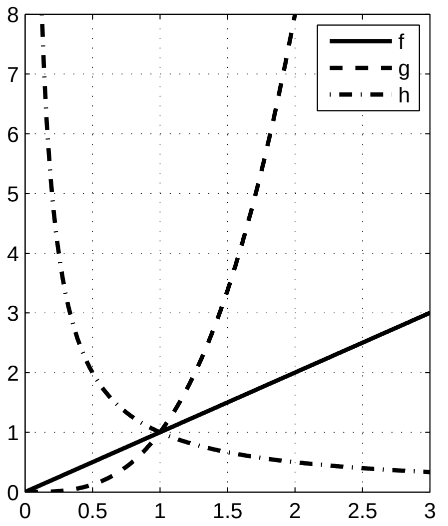
BEMERKUNG: Runden Sie ggf. auf ganze Zahlen.

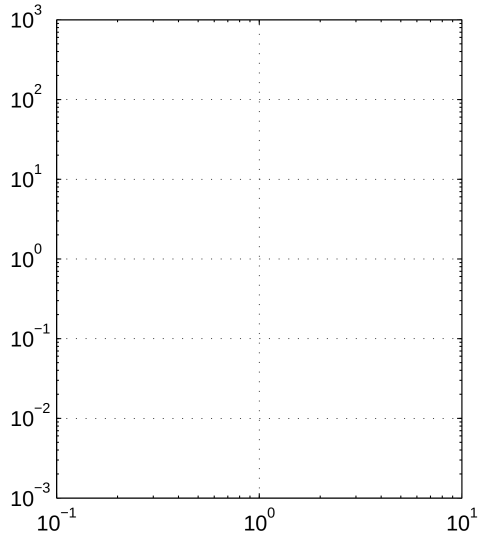
Aufgabe 5 (3+6 = 9 Punkte)

Die Linien im linken Diagramm sind Ausschnitte der Graphen dreier Funktionen, f, g und h, der Form $x \mapsto x^\alpha$.

a) Geben Sie für jeden der Graphen den passenden Wert α an.

b) Übertragen Sie das doppelt logarithmische Diagramm rechts auf Ihr Blatt und zeichnen Sie auch dort die Graphen der drei Funktionen ein. (Beschriftung nicht vergessen!)





Aufgabe 6 (4+2+2+2+4 = 14 Punkte)

Der Luftdruck p erfüllt als Funktion der Höhe z über dem Meerespiegel die Differenzialgleichung

$$p'(z) = -\frac{\alpha}{T(z)} p(z)\,.$$

Dabei ist $\alpha = 34\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{km}}$ eine Konstante und $T(z)$ die Temperatur in der Höhe z.

a) Wir nehmen an, die Temperatur habe, unabhängig von z, den konstanten Wert $T_0 = 272\,\mathrm{K}$ (also knapp unter 0° C).

(i) Wie muss die Konstante λ gewählt werden, damit

$$p(z) = C\mathrm{e}^{-\lambda z}$$

die Differenzialgleichung löst? (Hinweis: $8 \cdot 34 = 272$)

(ii) Wie muss außerdem C gewählt werden, damit der Luftdruck in Meereshöhe 1013 mbar beträgt?

(iii) In welcher Höhe z_0 ist der Luftdruck auf den halben Ausgangswert, d.h. auf 506, 5 mbar abgefallen?

(iv) Welcher Luftdruck herrscht in der Höhe $2z_0$ (mit z_0 aus (iii))?

b) Nun nehmen wir an, dass

$$T(z) = T_0 - \gamma z \qquad \text{mit} \qquad \gamma = 6{,}8\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{km}}\,,$$

d.h. dass die Temperatur linear mit der Höhe abnimmt. Wie muss die Konstante β gewählt werden, damit

$$p(z) = C(T_0 - \gamma z)^\beta$$

die Differenzialgleichung löst?

Aufgabe 7 (8+5+2 = 15 Punkte)

Sie planen, für Ihre Radtour die energetisch optimale Nahrung einzupacken. Dazu kombinieren Sie Apfelschorle und Bananen. Für die optimale Ernährung müssen pro Stunde folgende Bedingungen erfüllt werden. Sie sollten

(i) höchstens 750 Volumeneinheiten (VE),
(ii) mindestens 500 VE Flüssigkeit (d.h. Apfelschorle),
(iii) mindestens 40 VE Kohlenhydrate und
(iv) höchstens 250 Kilokalorien (kcal)

aufnehmen. Dabei gilt:

- 100 VE Banane enthalten 20 VE Kohlenhydrate und 75 kcal.
- 100 VE Apfelschorle enthalten 5 VE Kohlenhydrate und 25 kcal.

Bezeichnen Sie mit y die Menge Apfelschorle pro 100 VE (d. h. $y = 2{,}5$ entspricht 250 VE Apfelschorle) und mit x die Menge Bananen, ebenfalls pro 100 VE.

a) Drücken Sie die vier Bedingungen, die Ihre Sportlernahrung erfüllen muss, jeweils als Ungleichungen in x und y aus.
b) Kennzeichnen Sie in einem xy-Diagramm $(0 \leq x, y \leq 10)$ den Bereich, in dem alle vier Bedingungen erfüllt sind.
c) Wie muss Ihre Nahrung zusammengestellt sein, damit sie allen vier Bedingungen genügt und die Kohlenhydratmenge maximiert wird?

   Hinweis: Identifizieren Sie den entsprechenden Punkt in Ihrem Diagramm und berechnen Sie seine Koordinaten.

Aufgabe 8 (2+2+2+2+2+4 = 14 Punkte)

Eine Fähre bewegt sich mit 5 m/s nach Südwesten (Geschwindigkeit gegenüber dem als ruhend angenommenen Wasser). Ein Passagier überquert die Fähre mit 1 m/s senkrecht zur Fahrtrichtung (Geschwindigkeit gegenüber der Fähre), von der Südost- zur Nordwest-Seite. Über der Fähre fliegt eine Möwe so, dass sie sich stets in gleicher Höhe über dem Kopf des Passagiers befindet.

Wählen Sie ein Koordinatensystem dessen x_1-Achse nach Osten und dessen x_2-Achse nach Norden zeigt. Bezeichnen Sie mit $\vec{f} \in \mathbb{R}^2$ den Geschwindigkeitsvektor der Fähre gegenüber dem Wasser, mit $\vec{p}$ den des Passagiers gegenüber der Fähre und mit $\vec{m}$ den der Möwe gegenüber dem Wasser (alles in m/s).

a) Geben Sie $\vec{f}$ an.
b) Geben Sie $\vec{p}$ an.
c) Bestimmen Sie $\vec{m}$.

Während des gesamten Vorgangs weht der Wind aus Süden. Gegenüber der sie umgebenden Luft bewegt sich die Möwe mit einer Geschwindigkeit von 6 m/s.

Bezeichnen Sie den Vektor der Windgeschwindigkeit mit $\vec{w}$ und den Geschwindigkeitsvektor der Möwe gegenüber der Luft mit $\vec{u}$.

d) Geben Sie $\vec{w}/|\vec{w}|$ an.
e) Geben Sie $|\vec{u}|$ an.
f) Bestimmen Sie die Windgeschwindigkeit $|\vec{w}|$.
   Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Tipp: $\sqrt{72} = \ldots\sqrt{2}$.