Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Sebastian Debreli-Bölzle, Silvia Freund & Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 12/13

# Mathematik I
# für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Nachklausur am 8.4.2013

---

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 86 Punkte erreichbar, 70 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 35 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

---

**Aufgabe 1** (5 Punkte)
Schreiben Sie den folgenden Ausdruck in der Form $\log\big(g(x)\big)$ mit einer geeigneten Funktion $g(x)$,

$$\log(3x^2+1) - 2\log(x-5)\,.$$

Bestimmen Sie nun auch $\lim\limits_{x\to\infty} \log\big(g(x)\big)$.

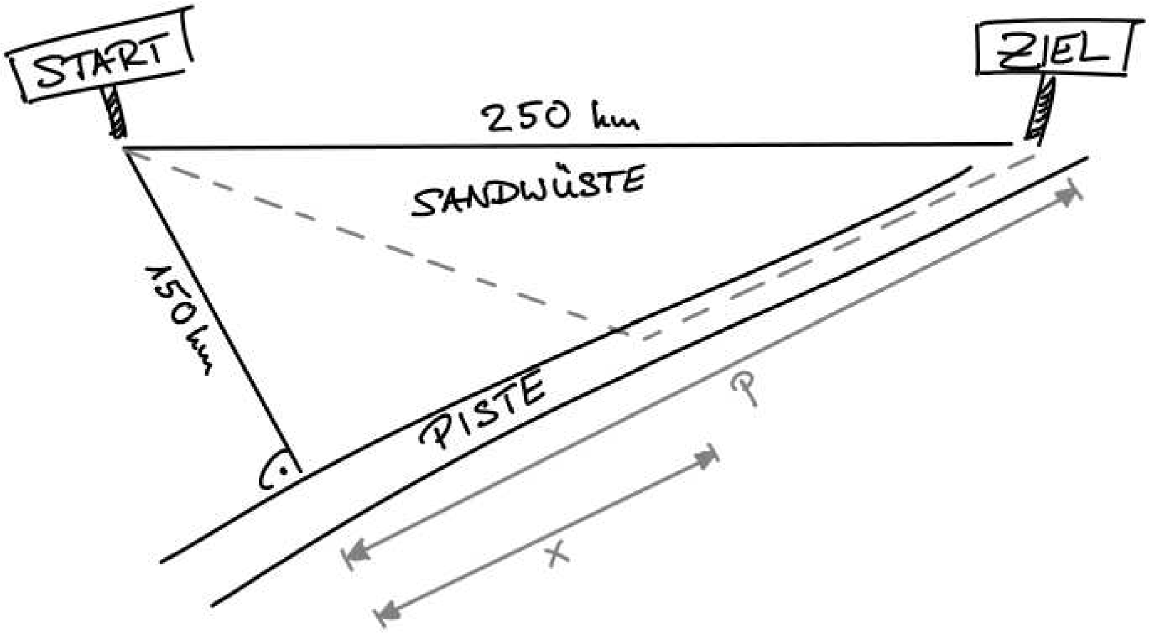
**Aufgabe 2** (4 Punkte)
Ludwig ist doppelt so alt wie Arnd. Vor 30 Jahren war Ludwig siebenmal so alt wie Arnd. Wie alt ist Ludwig jetzt?
Hinweis: Bezeichnen Sie das aktuelle Alter von Ludwig mit $\ell$, das von Arnd mit $a$. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, und lösen Sie dieses.

**Aufgabe 3** (2+2+2+4 = 10 Punkte)
Für wissenschaftliche Untersuchungen werden in einem Labor Fruchtfliegen gezüchtet. Diese vermehren sich so, dass sich der Bestand $B(t)$ am Ende des $t$-ten Tages beschreiben lässt durch $B(t) = B_0 \cdot \alpha^t$. Die Zucht beginnt (zur Zeit $t = 0$) mit 100 Fliegen. Nach 2 Tagen sind 900 Fliegen vorhanden.

a) Geben Sie $B(0)$ und $B(2)$ an.
b) Bestimmen Sie $\alpha$.
c) Berechnen Sie die Anzahl der Fliegen am Ende des ersten Tages sowie am Ende des dritten Tages.
d) Ab dem wievielten Tag können täglich am Ende des Tages 1000 Fliegen entnommen werden, ohne dass der Bestand unter den des Vortages zurückfällt?

**Aufgabe 4** (2+2+2+6+2 = 14 Punkte)

Ein Rallyeteam steht vor der Planung einer Wüstenetappe. Das Ziel ist 250 km vom Start entfernt. Der direkte Weg führt durch die Sandwüste, wo das Fahrzeug des Teams 60 km/h fahren kann. In 150 km Entfernung vom Startort verläuft eine Piste geradlinig auf das Ziel zu (siehe Skizze). Auf dieser Piste kann das Rallye-Fahrzeug 100 km/h fahren. Die Route zum Ziel darf von jedem Team frei gewählt werden.




a) Welche Länge hat die Strecke $p$ (siehe Skizze)?

b) Wie lange braucht das Rallye-Fahrzeug, wenn es auf dem kürzesten Weg zum Ziel fährt?

c) Wie lange braucht das Rallye-Fahrzeug, wenn es zunächst auf dem kürzesten Weg zur Piste und dann auf der Piste zum Ziel fährt?

d) Das Team plant nun eine Route, wie sie in der Skizze gestrichelt eingezeichnet ist. Nach welcher Strecke $x$ (siehe Skizze) sollte das Fahrzeug auf die Piste fahren, um möglichst schnell zum Ziel zu gelangen. Wie lange braucht das Fahrzeug in diesem Fall bis zum Ziel?

e) Ordnen Sie die in (b), (c) & (d) ermittelten Zeiten der Größe nach.

HINWEISE: (i) Vollständig gekürzte Brüche sind schöne Ergebnisse.
(ii) Vielleicht helfen die folgenden MATLAB-Zeilen.

```
>> [25 15].^2
ans =    625   225
>> sqrt(150^2+112.5^2)/60+(200-112.5)/100
ans =  4
```

**Aufgabe 5** (6+4+2 = 12 Punkte)

Sie wollen ein neues Rezept für einen Longdrink kreieren. Dazu kombinieren Sie eine 40%ige Spirituose mit einer nichtalkoholischen Flüssigkeit und füllen das Glas am Ende mit Eis auf. Dabei müssen Sie folgende Kriterien berücksichtigen:

(i) Damit der Drink auch wirklich ein Longdrink ist, muss er mindestens insgesamt 250 Volumeneinheiten (VE) haben, Eis nicht mitgezählt.

(ii) Da man nicht zu schnell betrunken werden sollte, dürfen die flüssigen Anteile des Drinks höchstens 20% Alkohol enthalten.

(iii) Der Drink sollte aber dennoch ein alkoholischer Cocktail bleiben und daher höchstens 200 VE der nichtalkoholischen Flüssigkeit beinhalten.

Bezeichnen Sie mit $x$ die Menge an Spirituose pro 100 VE und mit $y$ die Menge der nichtalkoholischen Flüssigkeit, ebenfalls pro 100 VE.

a) Drücken Sie die drei Bedingungen, die Ihr Longdrink erfüllen muss, jeweils als Ungleichung in $x$ und $y$ aus.

b) Kennzeichnen Sie in einen $xy$-Diagramm ($0 \leq x, y \leq 3$) den Bereich, in dem alle drei Bedingungen erfüllt sind.

c) Da die Spirituose die teuerste Zutat im Longdrink ist, wollen Sie deren Anteil minimieren. Wie muss Ihr Longdrink zusammengestellt sein, damit er allen drei Bedingungen genügt und die Alkoholmenge minimiert wird?
HINWEIS: Identifizieren Sie den entsprechenden Punkt in Ihrem Diagramm und berechnen Sie seine Koordinaten.

**Aufgabe 6** (2+4+2+2+4 = 14 Punkte)

In einem englischen Waldgebiet wurden amerikanische Grauhörnchen eingeschleppt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ($t$ in Jahren) bewohnen die einheimischen roten Eichhörnchen 95% des Gebiets, die Grauhörnchen 5%. Beide Arten haben eine Überlebensrate von 50%, d.h. innerhalb eines Jahres wird jeweils 50% des von den Hörnchen bewohnten Gebietes frei. Da die Grauhörnchen eine höhere Geburtenrate haben, besetzen sie jedes Jahr doppelt soviel frei gewordenes Gebiet wie die roten Eichhörnchen. Bezeichnen Sie den Anteil des von roten Eichörnchen bewohnten Gebiets mit $R_t$ und den Anteil des von Grauhörnchen bewohnten Gebiets mit $G_t$. Entsprechend ergibt sich das folgende Populationsmodell,

$$\begin{pmatrix} G_{t+1} \\ R_{t+1} \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} G_t \\ R_t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & ... \\ ... & ... \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie $G_0$ und $R_0$ an.

b) Bestimmen Sie die vollständige $2 \times 2$-Matrix $W$.

c) Berechnen Sie $W^2$. HINWEIS: Kürzen nicht vergessen!

d) Wie groß ist der Anteil des von Grauhörnchen bewohnten Gebiets zur Zeit $t = 2$?

e) Angenommen, nach vielen Jahren stellt sich ein stationärer Zustand ein, d.h. die Anteile des von Grauhörnchen und des von roten Eichörnchen bewohnten Gebiets bleiben von Jahr zu Jahr gleich. Wie hoch ist dann der Anteil der Grauhörnchen?

**Aufgabe 7** (2+2+2+2+2+3 = 13 Punkte)

Ein Flugzeug fliegt eine Stunde lang mit einer Geschwindigkeit von 700 km/h über Grund nach Südosten. Dabei hat es Gegenwind mit einer Geschwindigkeit vom 100 km/h. Danach dreht der Wind und weht nun mit 100 km/h aus Süden. Das Flugzeug hält eine weitere Stunde exakt Kurs, bewegt sich also (über Grund) weiterhin nach Südosten. Gegenüber der umgebenden Luft bewegt sich das Flugzeug die ganze Zeit mit der gleichen Geschwindigkeit.

Wählen Sie ein Koordinatensystem dessen $x_1$-Achse nach Osten und dessen $x_2$-Achse nach Norden zeigt. Bezeichnen Sie mit $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ die Vektoren der Fluggeschwindigkeit (über Grund) auf den beiden Teilstücken, mit $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_2$ die Vektoren der Windgeschwindigkeit sowie mit $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ die Geschwindigkeitsvektoren gegenüber der umgebenden Luft.

Hinweis: Geben Sie alle Geschwindigkeiten als Vielfache von 100 km/h an, d.h. wenn für eine Geschwindigkeit gilt $w = 100\,\mathrm{km/h}$ so schreiben Sie $w = 1$.

a) Geben Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_1$ (Flugzeug über Grund auf dem ersten Teilstück) an.
b) Geben Sie den Vektor der Windgeschwindigkeit $\vec{w}_1$ (d.h. auf dem ersten Teilstück) an.
c) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Flugzeug gegenüber der umgebenden Luft?
d) Geben Sie den Vektor der Windgeschwindigkeit $\vec{w}_2$ (d.h. auf dem zweiten Teilstück) an.
e) Geben Sie den Richtungsvektor $\vec{v}_2/|\vec{v}_2|$ der Fluggeschwindigkeit über Grund auf dem zweiten Teilstück an.
f) Mit welcher Geschwindigkeit (über Grund) fliegt das Flugzeug auf dem zweiten Teilstück? (Hinweis: Wurzeln im Endergebnis sind schön.)

**Aufgabe 8** (3+3+4+4 = 14 Punkte)

Berechnen Sie:

a) $f'(x)$ für $f(x) = 2^x$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\sin^2 x - \cos^2 x) \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cos x \,\mathrm{d}x$

Hinweise: Bei (c) hilft $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.
Integrieren Sie bei (d) partiell, leiten Sie dabei die Funktion $x \mapsto x$ ab.