Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Exponentielles Wachstum

Stefan Keppeler

29. Oktober 2012

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Fibonaccis Modell der Kaninchenvermehrung:[1]

- Kaninchen wird einen Monat nach Geburt geschlechtsreif – zwei Junge pro Paar
- einen Monat später nochmals 2 Junge
- einen weiteren Monat später stirbt es

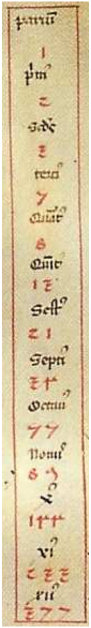
Beginn im ersten Monat mit $F_1 = N$ neugeborenen Tieren (z.B. $N = 1000$): Geburten im…

- …zweiten Monat: $F_2 = N$
- …dritten Monat: $F_3 = 2N$
  (Tiere aus erstem und zweitem Monat bekommen Junge),
- …im t-ten Monat: (Rekursionsvorschrift)

$$F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$$

Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci

[1] nicht ganz original



$F_1, F_2, F_3 \ldots$ ist eine Rekursionsfolge.

Die ersten Glieder sind

$$N,\ N,\ 2N,\ 3N,\ 5N,\ 8N,\ 13N,\ \ldots$$

(Faktor N nicht weiter interessant – rausdividieren)

Fibonacci-Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 \ldots$$

Rasantes Wachstum, wenn nicht andere Einflüsse entgegen wirken (z.B. Raubtiere, Verknappung von Ressourcen wie Nahrung und Platz, Krankheiten, . . .)

← aus Fibonaccis *Liber abbaci* (1227)

Ähnliches aber einfacheres Modell:

- Population wächst jährlich um Faktor $\alpha > 0$
  genauer: . . . wächst für $\alpha > 1$ und schrumpft für $\alpha < 1$
- Rekursionsformel

$$G_t = \alpha \, G_{t-1} \, , \qquad t \in \mathbb{N}$$

Man sieht sofort

$$G_t = \alpha^t \, G_0$$

Solche Folgen ($G_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$) heißen geometrische Progressionen oder exponentielle Wachstumsfolgen (t steht im Exponent)

Beispiele:

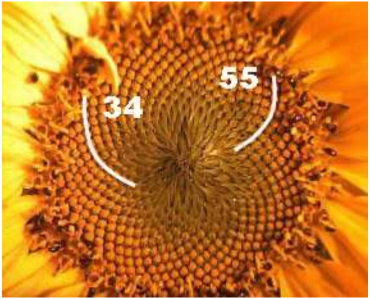
- $G_0 = 1$, $\alpha = 2$: Zweierpotenzen
- Guthaben G_0 auf Sparbuch, 3% Zinsen
  Guthaben G_t nach t Jahren:

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Hintegrund zum Auftreten von Fibonacci-Zahlen in bei der Anordung von Samen, Blütenblättern o.ä.

- Verhältnis $\frac{F_{t+1}}{F_t}$ zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen nähert sich für große t der Zahl $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Goldener Schnitt, Erklärung später)
- Fibonacci-Folge wächst also asymptotisch wie geometrische Progression mit $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist "maximal irrational", d.h. schlecht durch rationale Zahlen approximiertbar (ohne Beweis)
- Verwende $\alpha \cdot 360°$ als "Vorrückwinkel" bei der Anordnung von z.B. Samen in Blütenständen von Sonnenblumen

- Dieses “Konstruktionsprinzip” führt zu erkennbaren rechts- und linkslaufenden Spiralen[2] deren Anzahlen zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen sind
  (Das war jetzt noch kein Beweis. . .)



[2]Kann man ausprobieren auf:
www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Rekurs/Seite08.htm

- Die Teichrose verdoppelt jeden Tag die bedeckte Wasseroberfläche.
- Nach 30 Tagen ist der Teich vollständig bedeckt.
- Wann war er halb bedeckt?

Vorsicht: Geometrische Progression nicht verwechseln mit arithmetischer Progression (linear Wachstumsfolge)

$$A_t = A_0 + \beta t\,, \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

($\beta > 0$: Wachstum, $\beta < 0$: Schrumpfung)

Rekursion

$$A_t = A_{t-1} + \beta$$

- arithmetische Progression: Wachstum um festen Betrag
- geometrische Progression: Wachstum proportional zu vorhandener Menge

Beispiele:

- $A_0 = 0$, $\beta = 2$: nichtnegative gerade Zahlen
- Guthaben A_0 auf Girokonto (keine Zinsen)
  - monatliches Einkommen: $850€$
  - monatliche Ausgaben: $700€$

  Guthaben A_t nach t Monaten:

Beobachtung:

- β hat die Dimension von A_t durch Zeit (Dimension von t), also z.B. die Einheit €/Monat, falls A_t Geld in € und t Zeit in Monaten ist.
- α dagegen ist dimensionslos (reine Zahl)

Bemerkung:

In $A_t = A_0 + \beta t$ passen die Dimensionen so,
aber was ist in $A_t = A_{t-1} + \beta$?

Exponentielles Wachstum mit zeitlich veränderlichem Wachstumsfaktor, d.h. statt α nun α_t

$$G_t = \alpha_t \, G_{t-1}$$

Dann gilt

$$G_t = \alpha_t \, \alpha_{t-1} \cdots \alpha_1 \, G_0 = G_0 \prod_{s=1}^{t} \alpha_s$$

Was ist der mittlere Wachstumsfaktor $\overline{\alpha}$?
Vergleiche mit Folge, die jedes Jahr gleich wächst und zum selben Ergebnis G_t kommt, fordere also

$$G_0 \prod_{s=1}^{t} \alpha_s \stackrel{!}{=} \overline{\alpha}^t \, G_0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\alpha} = \sqrt[t]{\prod_{s=1}^{t} \alpha_s} = \left(\prod_{s=1}^{t} \alpha_s \right)^{1/t},$$

geometrisches Mittel der Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$.

- Geometrisches Mittel der Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_t > 0$:

$$\overline{\alpha} = \left(\prod_{s=1}^{t} \alpha_s \right)^{1/t}$$

Spezialfall:
Das geometrische Mittel zweier Zahlen $a, b > 0$ ist $\sqrt{ab}$

- Nicht verwechseln mit dem arithmetischen Mittel von t Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_t \in \mathbb{R}$:

$$\langle \beta \rangle = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} \beta_s = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_t}{t}$$

- Niederschlag

Januar	Februar	März
$15\,\mathrm{mm}$	$16\,\mathrm{mm}$	$17\,\mathrm{mm}$

Quartalsdurchschnitt: $16\mathrm{mm}$ (arithmetisches Mittel)

- Ein Schiff fährt zunächst
  - $300\,\mathrm{km}$ weit mit $20\,\mathrm{km/h}$ und dann
  - $300\,\mathrm{km}$ weit mit $30\,\mathrm{km/h}$.

Wie schnell fährt es im Durchschnitt?

Die Durchschnittsgeschwindigkeit $24\,\mathrm{km/h}$ ist weder das arithmetische Mittel ($25\,\mathrm{km/h}$) noch das geometrische Mittel ($24{,}49\ldots\,\mathrm{km/h}$) sondern das harmonische Mittel,

$$\overline{v}^h = \frac{t}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_t}}\,.$$

Wir mitteln hier verschiedene Geschwindigkeiten bei gleichen Strecken (bei gleichen Laufzeiten bräuchten wir das arithmetische Mittel).

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN