Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Exponentialfunktion & Logarithmus

Stefan Keppeler

5. November 2012

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Potenzen x^α sind auf dreierlei Definitionsbereichen erklärt:

- $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{Z}$
- $x = 0$ und $\alpha \geq 0$
- $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nicht erklärt (in $\mathbb{R}$) ist x^α demnach für

- $x = 0$ und $\alpha < 0$ (also nicht "$\frac{1}{0}$")
- $x < 0$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (also z.B. nicht "$\sqrt{-1}$")

Übrigens:

- $\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ (für $x \neq 0$)
- $x^{1/2} = \sqrt{x}$ und $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

Rechenregeln

- $x^\alpha x^\beta = x^{(\alpha+\beta)}$
- $x^0 = 1$, $x^1 = x$ und $0^\alpha = 0$ (für $\alpha > 0$)
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$

Beispiel: $\sqrt[3]{9^{-2} \cdot 3} =$

Außerdem:

- wenn $0 < x < y$ und $\alpha > 0$ $\Rightarrow$ $x^\alpha < y^\alpha$
  wenn $0 < x < y$ und $\alpha < 0$ $\Rightarrow$ $x^\alpha > y^\alpha$
  , vergleiche auch mit ÜA 21.

Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse

- Bisher: ganzzahlige Zeit t (zeitdiskret)
- Jetzt auch: $t \in \mathbb{R}$ (kontinuierlich)
- Gleichungen

$$G_t = \alpha^t G_0 \qquad \text{(geometrisch)} \qquad (1)$$

$$A_t = A_0 + \beta t \qquad \text{(arithmetisch)} \qquad (2)$$

  bleiben gültig (nicht jedoch die Rekursionen!).
- Funktionen
  - der Form (1) heißen Exponentialfunktionen,
  - der Form (2), linear bzw. affin-linear.

Notation:

Statt G_t bzw. A_t scheibt man auch oft $G(t)$ bzw. $A(t)$.

Beispiel:

- Kredit über $100€$ zu 6% Jahreszins
- Rückzahlung nach halbem Jahr: Wieviel?

  $G_{1/2} = \alpha^{1/2}\,G_0 = \sqrt{1{,}06} \cdot 100€ \approx 102{,}96€$,

  nicht mit $\frac{6\%}{2} = 3\%$ verzinsen, $3€$ Zinsen wären zu viel.
- Entsprechend: Schuld nach einem Monat:
  $G_{1/12} = \alpha^{1/12} G_0 \approx 100{,}487€$
- Insbesondere ist der monatliche Zinssatz $\approx 0{,}487\%$,
  und damit geringer als $\frac{6\%}{12} = 0{,}5\%$ (vgl. Zinseszins)

Andere Schreibweise:

- $\alpha^t = \mathrm{e}^{\gamma t}$,
- wobei $\mathrm{e} = 2,71828182846...$ (Eulersche Zahl),
- und $\gamma \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $\mathrm{e}^\gamma = \alpha$.
- e als Basis ist geschickt, da $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$. (Ableitung, später)
- Statt e^x schreibt man auch $\exp(x)$ (Exponentialfunktion).

Dimensionen

- Betrachte t nicht als reine Zahl (z.B. Anzahl Jahre), sondern als dimensionsbehaftet (verstrichene Zeit)
- Exponent muss dimensionlos sein
  - schreibe daher statt α^t nun $\alpha^{t/T}$,
  - mit Vergleichs-Zeitraum T (frei wählbare Einheit)
- Mit $\lambda = \frac{\gamma}{T}$ gilt: $\alpha^{t/T} = (\mathrm{e}^{\gamma})^{t/T} = \mathrm{e}^{\gamma t/T} = e^{\lambda t}$
- Dimension: $[\lambda] = 1/[t]$
- Bedeutung folgt aus $G_{1/\lambda} = \mathrm{e}\, G_0$ bzw. $G_{-1/\lambda} = \frac{1}{\mathrm{e}} G_0$:
  - $\lambda > 0$: $\frac{1}{\lambda}$ ist die Zeit, in der G auf das e-fache anwächst
  - $\lambda < 0$: $-\frac{1}{\lambda}$ ist die Zeit, in der G auf das $\frac{1}{\mathrm{e}}$-fache abfällt

Beispiel: Radioaktiver Zerfall

- $G(t)$: Materialmenge (in Anzahl Atome oder Mol oder kg...) als Funktion der Zeit t ist Exponentialfunktion,

$$G(t) = G(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,,$$

  mit Materialkonstante $\lambda > 0$.

- $Z(t)$: Anzahl Zerfälle in einem Zeitintervall $[t, t+T]$, T fest, ist ebenfalls Exponentialfunktion,

$$Z(t) = Z(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

  mit derselben Konstante $\lambda > 0$.

- **Bedeutung:** In gleich langen Zeitintervallen $[t, t+T]$ zerfällt stets derselbe Anteil der zu Beginn vorhandenen Menge.

Beispiel: Lambert–Beer-Gesetz der Lichtabsorption

Legt ein monochromatischer (einfarbiger) Lichtstrahl der einfallenden Intensität (Energie) I_0 durch ein absorbierendes Medium (z.B. Farbstoff) den Weg s zurück, so beträgt die Intensität des austretenden Strahls

$$I_s = I_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda s},$$

wobei die Konstante λ vom Material, von der Konzentration des Materials (z.B. in Wasser gelöster Farbstoff) und der Farbe (Wellenlänge) des Lichts abhängt.

Herleitung: Lambert-Beer-Gesetz der Lichtabsorption

- Die Intensität des austretenden Strahls I_{aus} ist immer proportional zur Intensität des einfallenden Strahls I_{ein}.
- Skizze

$$\Rightarrow \qquad \alpha_{s_1} \cdot \alpha_{s_2} = \alpha_{s_1+s_2}$$

- Klappt nur, falls $\alpha_s = \mathrm{e}^{-\lambda s}$, denn

$$\alpha_{s_1}\,\alpha_{s_2} = \mathrm{e}^{-\lambda s_1}\,\mathrm{e}^{-\lambda s_2} = \mathrm{e}^{-\lambda(s_1+s_2)} = \alpha_{s_1+s_2}\,.$$

- Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d.h.

$$y = \log x$$

  ist die eindeutige Lösung der Gleichung $\mathrm{e}^y = x$ zu gegebenem $x > 0$.

- Es gilt also $\log(\mathrm{e}^x) = x = \mathrm{e}^{\log x}$ für $x > 0$.
- Damit folgen Rechenregeln für den Logarithmus aus den Potenzrechenregeln

Beispiel:

- **Notation:**
  Machmal schreibt man auch $\ln$ (*Logarithmus naturalis)* statt $\log$ – wir schreiben $\log$.

Wann besitzt eine Funktion $f : A \to B$ eine Umkehrfunktion?

Definition: Eine Funktion $f : A \to B$ heißt injektiv, wenn die Bilder verschiedener Elemente stets verschieden sind, d.h.

$$f(x) \neq f(y) \quad \text{für} \quad x \neq y\,.$$

- Wenn f nicht injektiv ist, dann besitzt die Gleichung $f(x) = b$ für manche b mehrere Lösungen x.
- Wenn f injektiv ist, dann besitzt sie genau eine Lösung, genannt $x = f^{-1}(b)$, für jedes $b \in f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$.

Definition: Die so definierte Funktion $f^{-1} : f(A) \to A$ heißt Umkehrfunktion von f und erfüllt

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(b)) = b.$$

Beispiel:

- Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $f_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_1(x) = x^2$.
- Ebenso ist $x \mapsto -\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion von $f_2 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = x^2$.

Beachte: (Notation)

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ heißt
– streng monoton wachsend, wenn $f(x) < f(y)$ für $x < y$,
– streng monoton fallend, wenn $f(x) > f(y)$ für $x < y$,
– monoton wachsend, wenn $f(x) \leq f(y)$ für $x < y$ und
– monoton fallend, wenn $f(x) \geq f(y)$ für $x < y$.

Beispiele:

- $\exp$ ist streng monoton wachsend
- $f = const$ ist monoton wachsend und fallend, aber nicht streng
- $x \mapsto x^\alpha$ auf dem Definitionsbereich $D = [0, \infty)$ ist streng monoton wachsend für $\alpha > 0$ und fallend für $\alpha < 0$.

Satz:
Streng monotone Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ sind injektiv.

Folgerung:

- Da $\exp$ streng wachsend ist,
- und da $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$,
- existiert auf $D = \mathbb{R}^+$ die Umkehrfunktion, genannt $\log$ (Logarithmus).