

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen  
Konvergenz und Stetigkeit

Stefan Keppeler

10. Dezember 2012



## Konvergenz

Beschränktheit

Folgenkonvergenz

Beispiele

Reihen

Sätze

## Stetigkeit

Definition

Beispiele

Fourierreihen

Geometrische Reihe



**Definition:** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißt **beschränkt**, wenn es ein  $r > 0$  gibt mit  $|f(x)| \leq r$  für alle  $x \in D$ .

**Merke:** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  ist genau dann beschränkt, wenn ihr Graph in einem horizontalen Streifen eingeschlossen ist. Eine unbeschränkte Funktion wächst “ins Unendliche”.

**Beispiele:** (nächste Seite) 



Funktion $f$	$D \rightarrow \mathbb{R}^d$	beschränkt?
$\sin, \cos$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	ja, $r = 1$
$\arcsin, \arccos$	$[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$	ja, $r = 2\pi$
$\tan$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$	nein
$\arctan$	$\mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	ja, $r = \frac{\pi}{2}$
$\exp$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	nein
$\exp$	$(-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$	ja, $r = 1$
$\log$	$(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$	nein
Fibonacci	$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$	nein
$x \mapsto x^\alpha$	$(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$	ja für $\alpha = 0$ , nein für $\alpha \neq 0$
$x \mapsto x^\alpha$	$[1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$	ja für $\alpha \leq 0$ , nein für $\alpha > 0$
$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$	$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$	ja für $A = 0$ , sonst nein
für $A \in \mathcal{M}(n, m)$		
$\vec{x} \mapsto  \vec{x} $	$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	nein



**Definition:** Eine Folge  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots$  von Vektoren  $\vec{a}_n \in \mathbb{R}^d$  heißt **konvergent gegen den Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$** , geschrieben

- ▶  $\vec{a}_n \rightarrow \vec{a}$  oder
- ▶  $\vec{a}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{a}$  oder
- ▶  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{a}$ ,

wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für alle  $n > n_0$  gilt  $|\vec{a}_n - \vec{a}| < \varepsilon$ .




**Kurz:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{a} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |\vec{a}_n - \vec{a}| < \varepsilon$ .

- ▶ In diesem Fall heißt  $\vec{a}$  der **Grenzwert** oder **Limes** der Folge  $(\vec{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ; man sagt auch,  $\vec{a}_n$  **geht gegen  $\vec{a}$** .
- ▶ Ist eine Folge gegen keinen Vektor konvergent, so heißt sie **divergent**.



## Beispiele:

- ▶  $a_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$  konvergiert gegen 0. 
- ▶  $+1, -1, +1, -1, +1, \dots$  (d.h.  $a_n = (-1)^n$ ) divergiert.
- ▶ Die Folge

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \dots,$$

$$\text{d.h. } a_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

konvergiert gegen 2. 



Allgemein nennt man eine Folge der Form

$$a_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

eine **(unendliche) Reihe** und nennt den Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n b_k \quad \text{oder} \quad b_0 + b_1 + b_2 + \dots$$

**konvergent** gegen  $a$  wenn die **Folge der Partialsummen**  $a_n$  gegen  $a$  konvergiert. Man nennt dann  $a$  auch den **Wert** dieses Ausdrucks.



**Satz** (ohne Beweis): Eine Folge  $\vec{a}_n$  in  $\mathbb{R}^d$  konvergiert genau dann (dann und nur dann) gegen  $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$ , wenn in  $\mathbb{R}$  jede Komponente  $a_{n,i}$  gegen  $a_i$  konvergiert. (“Konvergenz gilt **komponentenweise**.”)

Da sich eine Zahlenfolge als Funktion  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  auffassen lässt, ist sie genau dann beschränkt, wenn es ein  $r > 0$  gibt, so dass  $-r \leq a_n \leq r$  für alle Folgenglieder  $a_n$  gilt.

**Satz** (ohne Beweis): Jede konvergente Folge in  $\mathbb{R}^d$  ist **beschränkt**. 

### Folgerungen:

- ▶ Die Fibonacci-Folge divergiert.
- ▶ Die Folge  $0, 2, 4, 6, \dots$  der geraden Zahlen divergiert.

### Bemerkung:

Es gibt zwei Arten zu divergieren: entweder ins Unendliche, oder beschränkt (rastloses Umherlaufen wie  $+1, -1, +1, -1, \dots$ ).





**Satz** (ohne Beweis):


Ist eine Folge **monoton** und **beschränkt**, so konvergiert sie. 

**Satz** (ohne Beweis): Wenn für die Zahlenfolgen  $a_n, b_n$  und  $c_n$  gilt

▶  $a_n \leq b_n \leq c_n$  sowie

▶  $a_n \rightarrow a$  und  $c_n \rightarrow a$ ,

dann gilt auch  $b_n \rightarrow a$ .

**Beispiel:**  $\frac{\sin(1/n)}{1/n}$  

**Satz** (ohne Beweis): Wenn die Folgen  $\vec{a}_n, \vec{b}_n \in \mathbb{R}^d$  konvergieren,  $\vec{a}_n \rightarrow \vec{a}$  und  $\vec{b}_n \rightarrow \vec{b}$ , dann konvergieren auch

▶ die Summen,  $\vec{a}_n + \vec{b}_n \rightarrow \vec{a} + \vec{b}$ , und

▶ die Vielfachen,  $\lambda \vec{a}_n \rightarrow \lambda \vec{a}$  ( $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ )

▶ Sind  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  Zahlenfolgen (statt Vektoren), dann konvergieren auch die Produkte,  $a_n b_n \rightarrow ab$ .



**Definition:** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^m$  heißt **stetig**, wenn für jede konvergente Folge  $a_n \rightarrow a$  mit  $a_n \in D, a \in D$  gilt  $f(a_n) \rightarrow f(a)$ .



**Übrigens:**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \iff$  Für jede Folge  $a_n \rightarrow x_0$  gilt  $f(a_n) \rightarrow b$ .  
Def.


**Also kurz:**  $f$  stetig in  $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .



## Beispiele:

- ▶ Die **Heaviside-Funktion**

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig, weil die Folge  $a_n = -\frac{1}{n}$  gegen  $a = 0$  konvergiert, aber  $\theta(a_n) = 0$  für alle  $n$ , während  $\theta(a) = 1$ . 

- ▶  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\arctan$ ,  $\exp$  sind stetig auf  $\mathbb{R}$
- ▶  $\arcsin$ ,  $\arccos$  sind stetig auf  $[-1, 1]$
- ▶  $\log$ ,  $x \mapsto x^\alpha$  sind stetig auf  $D = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ ,
- ▶  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ,  $\vec{x} \mapsto |\vec{x}|$  sind stetig auf  $D = \mathbb{R}^m$ .

**Merke:** Anschaulich ist eine Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne abzusetzen.



**Satz über Fourierreihen** (ohne Beweis):


Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und periodisch mit Periodenlänge  $T$ , dann gibt es reelle Zahlen  $a_0, a_1, a_2, \dots$  und  $b_1, b_2, b_3 \dots$  so, dass

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ , wobei  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Die rechte Seite heißt die **Fourier-Reihe** von  $f$ .

(vgl. Vorl. 6 Trigonometrie, Berechnung der  $a_k$  &  $b_k$  später)



**Satz:** Die **geometrische Folge**  $a_n = q^n$ ,  $q \in \mathbb{R}$  konvergiert genau dann, wenn  $-1 < q \leq 1$ ; für  $q = 1$  konvergiert sie gegen 1, für  $|q| < 1$  gegen 0. 

**Satz:** Die **geometrische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

mit  $q \in \mathbb{R}$  konvergiert gegen  $\frac{1}{1-q}$ , wenn  $|q| < 1$ , und divergiert andernfalls. 