Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Uneigentliche Integrale & mehrdimensionale Differenzialrechnung

Stefan Keppeler

14. Januar 2013

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Uneigentliche Integrale

- Unendlich
- Integrand divergiert
- Grenze ∞

Mehrdimensionale Differenziation

- Partielle Ableitungen
- Richtungsableitungen
- Totale Ableitung ∇, Tangentialebene
- Zweite Ableitungen

- Bisher können wir $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und f stetig.
- Wird irgendetwas Unendlich ∞, der Integrand oder die Grenze(n), so sprechen wir von einem uneigentlichen Integral und definieren es als Grenzwert.

- Divergiere also der Integrand bei $c \in [a, b]$.
- Dann definieren wir

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &:= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0+} \int_{c+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

falls alle Grenzwerte existieren.

Beispiel: $\int_{-1}^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}}$

- Ist dagegen eine Integrationsgrenze gleich $\pm\infty$, so definieren wir analog

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{bzw.}$$
$$\int_{-\infty}^b g(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(für f stetig auf $[a,\infty)$ und g stetig auf $(-\infty,b]$).

Beispiel: $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

Halten wir in der Funktion $f(x,y)$, d.h. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, die Variable y fest ("behandeln y als Zahl") und leiten dann (nach x) ab, so bilden wir die partielle Ableitung von f nach x,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

Bemerkung: $\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Umgekehrt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Beispiel: *Calc-zilla*

http://abstrusegoose.com/26

- $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$; partielle Ableitung nach x_1 ist Ableitung in Richtung von $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_1) - f(\vec{x})}{h} .$$

- Richtungsableitungen in beliebiger Richtung: $\vec{e} \in \mathbb{R}^d$ mit $|\vec{e}| = 1$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}) - f(\vec{x})}{h} \qquad \left(=: \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}) \right)$$

- Richtungsableitung lässt sich aus den partiellen Ableitungen berechnen (ohne Beweis), z.B. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\vec{e} = (e_1, e_2)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = e_1 \frac{\partial f}{\partial x} + e_2 \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} .$$

Beispiel: $f(x, y) = x\mathrm{e}^y$, Stelle $(1, 0)$, Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

- Der Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ heißt Gradient von f,

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d} \right),$$

und ist ein Vektorfeld, d.h. eine Funktion $\nabla f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

- $\nabla f(x)$: Richtung des steilsten Anstiegs
- Tangentialebene T an den Graphen von f im Punkt $\vec{\xi}$:

$$T(\vec{x}) = f(\vec{\xi}) + \nabla f(\vec{\xi}) \cdot (\vec{x} - \vec{\xi}) = f(\vec{\xi}) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi})\,(x_i - \xi_i)\,.$$

wobei $\vec{u} \cdot \vec{v}$ für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^d$ das Skalarprodukt ($\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$) ist,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i = (u_1, \ldots, u_d) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \vec{u}^T \vec{v}$$

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

- $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ hat d erste partielle Ableitungen und
  d^2 zweite partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f \,,$$

- die die sogenannte Hesse-Matrix H bilden. **Beispiel:** $f(x, y)$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

…z.B. für $x \sin y$

Satz: Wenn die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar ist und die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} .$$

Folgerung: H ist dann eine symmetrische Matrix, $H^T = H$.

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Satz:

- Hat die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ in $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ ein (lokales) Minimum oder Maximum, so ist $\nabla f(\vec{x}) = 0$.
- Ist umgekehrt $\nabla f(\vec{x}) = 0$ und die Hesse-Matrix $H(\vec{x})$
  - positiv-definit, so hat f in $\vec{x}$ ein lokales Minimum.
  - negativ-definit, so hat f in $\vec{x}$ ein lokales Maximum.

Definition: Eine symmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}(n, n)$ heißt

- positiv-definit, wenn für alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{u} \neq 0$ gilt $\vec{u}^T A \vec{u} > 0$.
- negativ-definit, wenn für alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{u} \neq 0$ gilt $\vec{u}^T A \vec{u} < 0$.

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN