Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$n \times m$ - Matrix

\# Zeile   \# Spalten

$n = m$: quadratisch

$n \neq m$: rechteckig

$$A = (a_{ij}) \qquad i = 1, \ldots, n \qquad j = 1, \ldots, m$$

Matrix   Matrixelement

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

alle 2×3

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}$$

geht nicht

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{2} \times \underline{3} \qquad\qquad \underline{3} \times \underline{4}$$

Ergebnis: 2×4

„Zeile mal Spalte“

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 14 \\ 4 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot B$$

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$$

$$4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = -4$$

$\cancel{B \cdot A = ?}$ gilt hier nicht

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$(3 \times 2)^T \qquad 2 \times 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Spiegeln an Diagonale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$ ist <u>symmetrisch</u>

d.h. $A^T = A$

(nur für quadrat. Matrizen)

$$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 1}{\overset{\in\mathbb{R}^2}{\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}}} = \underset{3\times 1}{\overset{\in\mathbb{R}^3}{\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -2\end{pmatrix}}}$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{TÜ} \arrow[r, bend left, "5\%"] & \text{RT} \arrow[l, bend left, "10\%"]
\end{tikzcd}
$$

$$N^{(0)} = \begin{pmatrix} 84\,000 \\ 112\,000 \end{pmatrix}$$

Tübingen $N_1^{(0)}$

Reutlingen $N_2^{(0)}$

$$N_1^{(1)} = \underline{0{,}95} \cdot N_1^{(0)} + \underline{0{,}1} \cdot N_2^{(0)}$$

$$N_2^{(1)} = \underline{0{,}05} \cdot N_1^{(0)} + \underline{0{,}9}\, N_2^{(0)}$$

$$N^{(1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix}}_{= W} N^{(0)}$$

Übergangsmatrix

hier (in W)
Spaltensumme $= 1$
da keine Geburten
etc.

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 84\,000 \\ 112\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91\,000 \\ 105\,000 \end{pmatrix}$$

Fibonacci-Kaninchen

einmonatige und zweimonatige Kaninchen $N^{(t)} = \begin{pmatrix} N_1^{(t)} \\ N_2^{(t)} \end{pmatrix}$

einmonatige kriegen Junge (werden zweimonatig)

zweimonatige —— " —— (und sterben)

$$N_1^{(t+1)} = N_1^{(t)} + N_2^{(t)}$$

$$N_2^{(t+1)} = N_1^{(t)}$$

$$N^{(t+1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=L} N^{(t)}$$

$=L$ Leslie-Matrix

erweitertes Modell

20% der zweimonatigen werden drei Monate alt

(& kriegen nochmal Junge)

5% sterben im ersten Monat

$$N_1^{(t+1)} = N_1^{(t)} + N_2^{(t)} + N_3^{(t)}$$

$$N_2^{(t+1)} = 0{,}95 \cdot N_1^{(t)}$$

$$N_3^{(t+1)} = 0{,}2 \cdot N_2^{(t)}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben: $A \neq 0$, $A^2 = 0$ (ÜA 35 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$)

Annahme: A hat Inverse A^{-1}, d.h. $A^{-1}A = I$

$A^2 = 0$ von links mit A^{-1}

$$\Rightarrow \quad A^{-1} \cdot (A \cdot A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (A^{-1} \cdot A) \cdot A = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad I \cdot A = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A = 0$$

↯ zur Voraussetzung $A \neq 0$