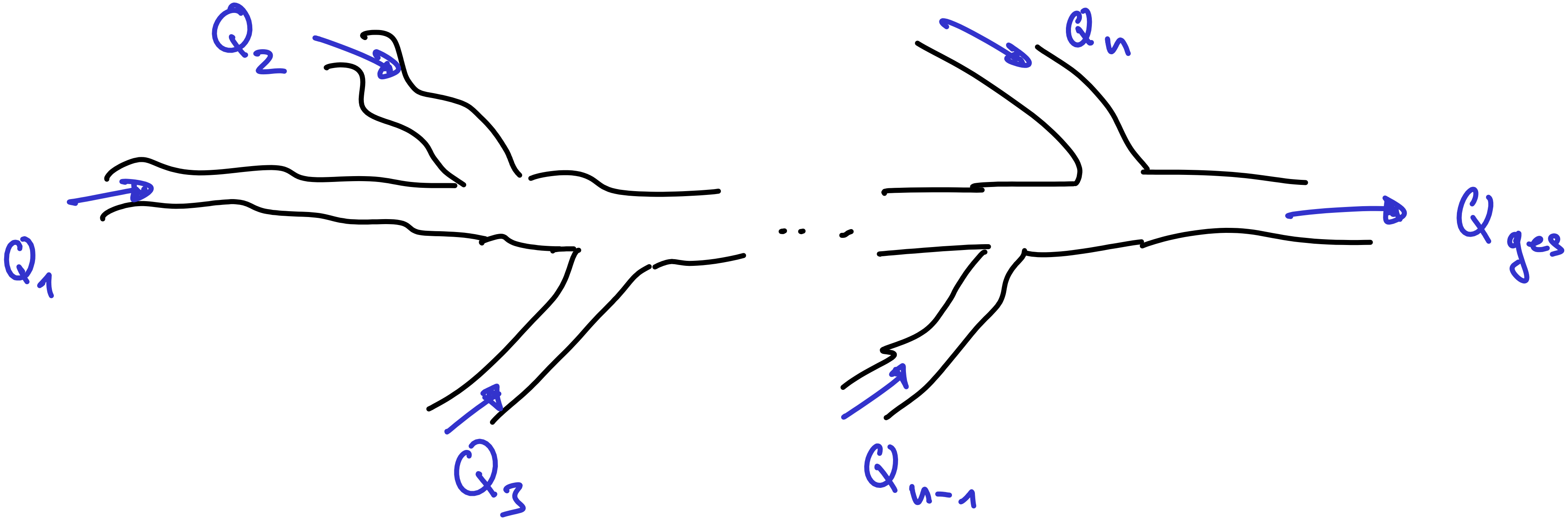


Konzentrationen von z.B. Na^+, K^+, NO_3^-, NO_2^-, HSO_4^-, Pb^{2+}, Cd^{2+} im Zufluss & im Abfluss

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = Q_{ges}$$

$$c_1^{Na^+} Q_1 + c_2^{Na^+} Q_2 + \dots + c_n^{Na^+} Q_n = c_{ges}^{Na^+} Q_{ges}$$

analog für weitere Stoffe

- k Stoffe : k+1 Gleichungen
- n Variablen

hoffe auf eindeutige Lösung für $k = n-1$
(oder besser: überbestimmt...? mehr Stoffe)

gesucht: $x_j = Q_j / Q_{ges}$ (teile alle Gln. durch Q_{ges})

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

$$c_1^{Na^+} x_1 + c_2^{Na^+} x_2 + \dots + c_n^{Na^+} x_n = c_{ges}^{Na^+}$$

Kurzschreibweise

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ c_1^{Na^+} & c_2^{Na^+} & \dots & c_n^{Na^+} & c_{ges}^{Na^+} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right)$$ bedeutet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$ hier $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

ausführlich

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 3$$
$$4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 6$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{23}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{23}{3} \end{array}\right) \begin{array}{ll} -2 & 5 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{2}{3} \\ \mid \cdot \frac{12}{37} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \boxed{} \neq 0$$

Zeilenstufenform

ausgeschrieben

$$x_1 + x_2 + 3/4\, x_3 - \tfrac{1}{2} x_4 = 4$$

$$x_3 - 2 x_4 = 4$$

zweite Zeile: wähle x_4 beliebig, $\underline{x_4 = t} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad x_3 = 4 + 2t$$

erste Zeile: wähle x_2 beliebig, $\underline{x_2 = s} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 4 - s - \tfrac{3}{4}(4+2t) + \tfrac{1}{2} t$$

$$= 1 - s - t$$

allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $t, s \in \mathbb{R}$ beliebig

(Ebene im $\mathbb{R}^4$)

z.z.: $L_{\vec{0}}$ ist Unterraum

- $L_{\vec{0}} \subseteq \mathbb{R}^n$ (n = # der Variable)
- $\vec{u}, \vec{v} \in L_{\vec{0}}$ d.h. $A\vec{u} = \vec{0} = A\vec{v}$

Ist $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in L_{\vec{0}}$? $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} A(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) &= A(\alpha\vec{u}) + A(\beta\vec{v}) \\ &= \alpha(A\vec{u}) + \beta(A\vec{v}) \\ &= \alpha \cdot \vec{0} + \beta \cdot \vec{0} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

$\square$

2.2. $\vec{x} \in L_{\vec{b}} \iff \vec{x} = \vec{u} + \vec{y}, \; \vec{y} \in L_{\vec{0}}$

($\vec{u}$ ist fest vorgegeben)

"$\Leftarrow$": $\vec{x} = \vec{u} + \vec{y}$

$$\Rightarrow A\vec{x} = A\vec{u} + A\vec{y} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

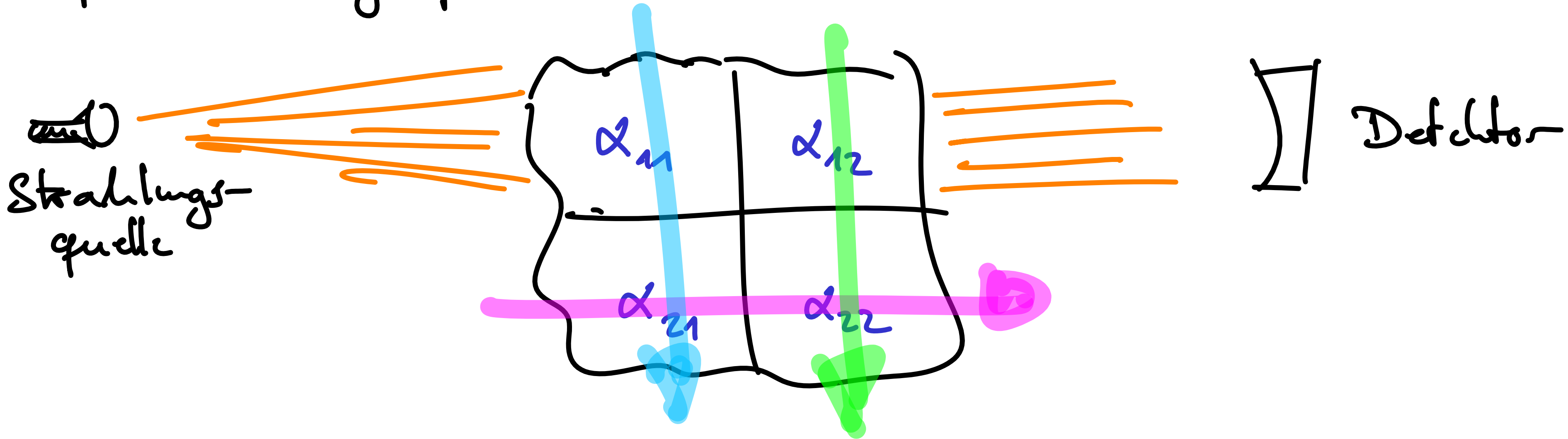
"$\Rightarrow$": $\vec{x} \in L_{\vec{b}} \iff A\vec{x} = \vec{b}$

$$\vec{y} := \vec{x} - \vec{u}$$

$$A\vec{y} = A\vec{x} - A\vec{u} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

d.h. $\vec{y} \in L_{\vec{0}}$

Bsp: Tomographie



Intensität: $I_0 \rightsquigarrow I = \alpha_{11}\,\alpha_{12}\,I_0$

$$\underbrace{\lambda_1}_{\text{gemessen}} = \frac{I}{I_0} = \underbrace{\alpha_{11}\cdot\alpha_{12}}_{\text{gesucht}}$$

Logarithmieren: $\log \lambda_1 = \log \alpha_{11} + \log \alpha_{12}$

liefert LGS in $\log \alpha_{11}, \log \alpha_{12}, \ldots$

s_A = # Schwestern von Anton

s_B = # Schwestern von Berta

b_A = # Brüder von Anton

b_B = ——— " ——— Berta

$$\left.\begin{aligned} s_A &= s_B + 1 \\ b_B &= b_A + 1 \end{aligned}\right\} \text{„sind Geschwister"}$$

$$s_A = 2 b_A$$

$$s_B = b_B$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} s_A \\ s_B \\ b_A \\ b_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_A - s_B \phantom{{}+ b_A - b_B} &= 1 \\ b_A - b_B &= -1 \\ s_A \phantom{{}- s_B} - 2 b_A &= 0 \\ s_B - b_B &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad -1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad -1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad -2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} s_A \\ s_B \\ t_A \\ t_B \end{pmatrix}$$

$b_B = \underline{\underline{3}}$, $b_A = b_B - 1 = \underline{\underline{2}}$

$s_B = 2 b_A - 1 = \underline{\underline{3}}$

$s_A = s_B + 1 = \underline{\underline{4}}$

$\Rightarrow$ 7 Kinder in der Familie