Hörsaaleinteilung Klausur

→ Ende der Woche auf Vorlesungshomepage

Leslie-Matrix

$$\vec{x}^{(t+1)} = L \, \vec{x}^{(t)}$$

Populationsvektor

Leslie-Matrix

z.B.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^{(t)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wie sah $\vec{x}^{(t-1)}$ aus?

$$\underbrace{\vec{x}^{(t)} = L}_{\text{bekannt}} \; \underbrace{\vec{x}^{(t-1)}}_{\text{gesucht}}$$

lineares Gl.-Sys. für $\vec{x}^{(t-1)}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \end{array}\right) \longleftarrow \text{LGS in Kurzschreibweise}$$

$$\vec{x}^{(t-1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -10/3 \end{pmatrix}$$

$$5\,\underbrace{x_2^{(t-1)}}_{=4} + 3\,\underline{\underline{x_3^{(t-1)}}} = 10$$

$$\Rightarrow \quad x_3^{(t-1)} = -\frac{10}{3}$$

ausdrücklich schlecht, aber das passiert mit erfunden Zahlen

1 Jahr vorwärts: multiplizieren mit L

1 Jahr rückwärts: löse LGS

2 Jahre vorwärts: multiplizieren mit L^2
(bzw. 1x mit L und noch ein mal mit L)

2 Jahre rückwärts

$$\vec{x}^{(t)} = L^2 \vec{x}^{(t-2)}$$

LGS mit Koeff.-Matrix L^2 (statt L)

Gleichgewicht, d.h. Population ändert sich nicht.

$$\vec{x}^{(t+1)} = L \, \vec{x}^{(t)}$$

sind gleich

d.h. $I \cdot \vec{x} = \underbrace{L}_{\text{bekannt}} \vec{x}$ gesucht

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

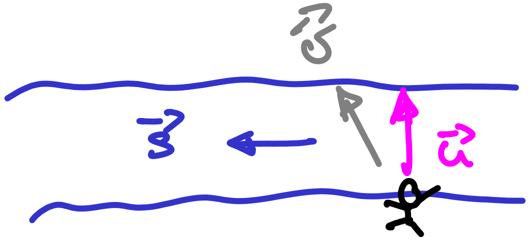
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_2 + 3x_3 \\ x_1 \\ \frac{1}{2} x_2 \end{pmatrix}$$

$$(L - I)\vec{x} = 0$$

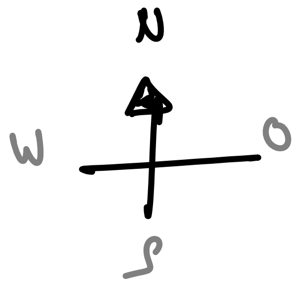
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

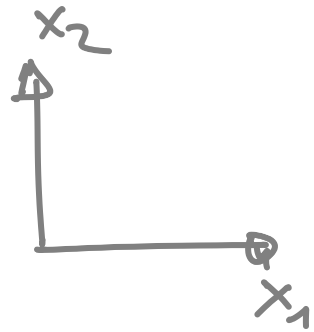
$$x_1 = 5x_2 + 3x_3$$
$$x_2 = x_1$$
$$x_3 = \frac{1}{2}x_2$$

Klausur 11/12, 1



(c)





a) $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \frac{m}{s} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$

b) $|\vec{u}| = 1 \frac{m}{s}$

c) (i)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$$

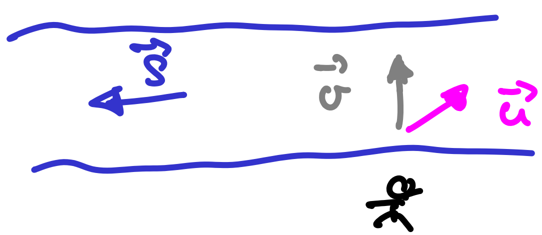
$$\underline{\vec{v} = \vec{u} + \vec{s}} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$$

$$\Longrightarrow |\vec{v}| = |(\vec{u} + \vec{s})| = \sqrt{(\vec{u}+\vec{s})(\vec{u}+\vec{s})}$$

$$= \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{s}\cdot\vec{s} + 2\,\vec{u}\cdot\vec{s}}$$

$$= \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{s}|^2 + 2\,|\vec{u}|\cdot|\vec{s}|\cdot \cos(\sphericalangle(\vec{u},\vec{s}))}$$

Skizze zu d)



(qualitativ)

(i) $$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

(ii) $$|(\vec{u} + \vec{s})| = |\vec{v}|$$

wir kennen $\vec{u}$ nicht, sondern nur $|\vec{u}|$

behauptet ☺

$$|\vec{u}|^2 = |(\vec{v} - \vec{s})|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{s}|^2 - 2\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{s}}_{=0}$$

können wir jetzt bestimmen

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{s} \iff \vec{u} = \vec{v} - \vec{s}$$

$$\Longrightarrow |\vec{u}| = |(\vec{v} - \vec{s})|$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - |\vec{s}|^2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{m^2}{s^2}$$

also $|\vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ \frac{m}{s}$

(iii)

Er benötigt $\dfrac{10\,m}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\ \frac{m}{s}} = \underline{\dfrac{20}{\sqrt{3}}\,s} = \underline{\dfrac{20}{3}\sqrt{3}\ s}$