Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 12/13

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe am 16.11.12)

Aufgabe 23 (10 Punkte)
Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

a) $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$ b) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ c) $f(x) = |x^2 - 4|$ d) $f(x) = x|x|$

Aufgabe 24 (10 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^8 - 256}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{27 + x^3}{2x + 6}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ für $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 25 (10 Punkte)
Wir definieren

$$H_n(x) := (-1)^n \, \mathrm{e}^{x^2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \mathrm{e}^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

a) Bestimmen Sie H_0, H_1 und H_2.
b) Drücken Sie $H_n'(x)$ in der Form $f(x)H_n(x)+g(x)H_{n+1}(x)$ mit geeigneten Funktionen f und g aus.

Aufgabe 26 (10 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{n-3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{4}{n-3}\right)^{n/2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{3}{3-n}\right)^{2n}$

Aufgabe 27 (10 Zusatzpunkte)
Erreichen Sie bis spätestens 9.12.12 auf `www.khanacademy.org` *Proficiency* in den *Skills Derivative intuition*, *Derivatives 1* und *Power rule*. Hinweise: Siehe Aufgabe 11.

Aufgabe 28 (10 Punkte)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten im Folgenden stets die Asymptotik für $x \to x_0$.

a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq -n$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$f(x) = o\big((x - x_0)^n\big) \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^k f(x) = o\big((x - x_0)^{n+k}\big)$$

Dafür schreiben wir auch kurz $(x - x_0)^k\, o\big((x - x_0)^n\big) = o\big((x - x_0)^{n+k}\big)$.

b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ sowie $f(x) = o\big((x - x_0)^n)\big)$ und $g(x) = o\big((x - x_0)^m\big)$. Zeigen Sie

$$f(x) + g(x) \;=\; o\big((x - x_0)^{\min(n,m)}\big)\,.$$

Dafür schreiben wir kurz $o\big((x - x_0)^n\big) \;+\; o\big((x - x_0)^m\big) \;=\; o\big((x - x_0)^{\min(n,m)}\big)$.

c) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel,

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,,$$

unter Verwendung der Charakterisierung der Ableitung mit Hilfe von Klein-o (siehe Lemma 4).