

## Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe am 23.11.2012)

---

### Aufgabe 29

(10 Punkte)

a) Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

$$f_1(x) = 5^x, \quad f_2 = f \circ g \circ h, \quad f_3(x) := \log_7(x)$$

Dabei sind  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beliebige differenzierbare Funktionen.

b) Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ .

HINWEIS: Denken Sie an die l'Hospitalsche Regel.

### Aufgabe 30

(10 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie für  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} f^{(\nu)}(x) g^{(n-\nu)}(x).$$

ZUR ERINNERUNG: Dabei ist  $f^{(k)}(x)$  die  $k$ te Ableitung der Funktion  $f(x)$  nach  $x$ , d.h.  $f^{(0)} = f$ ,  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$  etc.

HINWEIS: Führen Sie eine vollständige Induktion nach  $n$  durch, und werfen Sie einen Blick auf den Beweis der Binomischen Formel (Satz 1).

### Aufgabe 31

(10 Punkte)

Die Hyperbelfunktionen sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

- Für welche  $x$  sind die Funktionen definiert?
- Bestimmen Sie jeweils den Limes für  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$ .
- Zeigen Sie:  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ .

### Aufgabe 32

(10 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

- $\sinh x$ ,
- $\cosh x$
- und  $\tanh x$ .

Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mit Hilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus. Skizzieren Sie nun  $\sinh$ ,  $\cosh$  und  $\tanh$ . Auf welchen Teilintervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die drei Funktionen streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie maximale Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, dass die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

**Aufgabe 33**

(10 Punkte)

Die Umkehrfunktion des *Sinus Hyperbolicus* heißt *Area Sinus Hyperbolicus*, Funktionsname *Arsinh*, d.h.  $\text{Arsinh}(\sinh(x)) = x$ , analog für die anderen hyperbolischen Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitions- und Wertebereiche für

- a)  $\text{Arsinh } x$ ,    b)  $\text{Arcosh } x$     und    c)  $\text{Artanh } x$

an. Bei a und c ist dies eindeutig – bei b sind zwei Zweige anzugeben, analog zum Vorleistungsbeispiel  $f(x) = x^2$  mit Umkehrfunktionen von  $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  und von  $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^-$ .

**Aufgabe 34**

(10 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe von Satz 6 die Ableitungen von

- a)  $\text{Arsinh } x$ ,    b)  $\text{Arcosh } x$     und    c)  $\text{Artanh } x$ .

BEMERKUNG: Sie benötigen dazu keine expliziten Darstellungen der Umkehrfunktionen, sondern lediglich die Ableitungen aus Aufgabe 32.