Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 12/13

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 07.12.2012)

Aufgabe 40 (5 Zusatzpunkte)
Sei $x > 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis darf keine Summenzeichen mehr enthalten):

$$\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} \frac{x^\nu}{x^{n-\mu+1} - 1}\,.$$

Hinweis: Gehen Sie ähnlich vor wie in Aufgabe 21.

Aufgabe 41 (10 Punkte)
Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\sinh x$ b) $\cosh x$ c) $\operatorname{Artanh} x$

um $x_0 = 0$. Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?
Hinweis: Denken Sie bei c) an die Herleitung der Taylorreihe von log in der Vorlesung.

Aufgabe 42 (20 Punkte)
Berechnen Sie die Taylorreihen der Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt)

a) $\dfrac{\cos x - 1}{x}$ b) $\dfrac{1}{(3-x)(5-x)}$ c) $\mathrm{e}^{-x^2}\cos x$

um Null, sowie die Taylorreihen von

d) $\dfrac{1}{1+x}$ um $x_0 = 42$ und e) $\sin x$ um $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?

Aufgabe 43 (10 Punkte)
Bestimmmen Sie die folgenden Grenzwerte (mit Erklärung/Herleitung)!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^5(2x)}{x^2(\mathrm{e}^{-x} - 1)^3}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(\log x)}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\mathrm{e}^x - 1 - x)^{1006}}{x^{12}(\cos x - 1)^{1000}}$

Aufgabe 44 (Extremwert-Test) (10 Punkte)

Eine Funktion f sei auf dem Intervall $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ n mal stetig differenzierbar und es gelte für $x_0 \in I$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0\,,$$

Zeigen Sie, dass dann die folgenden Implikationen gelten:

(i) n ist ungerade $\Rightarrow$ x_0 ist keine Extremalstelle.

(ii) n gerade, $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ x_0 ist lokale Maximalstelle.

n gerade, $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ x_0 ist lokale Minimalstelle.

Definition: x_0 heißt lokale Maximal- bzw. Minimalstelle von f, wenn gilt:

$$f(x) < f(x_0) \text{ bzw. } f(x) > f(x_0) \quad \forall\, x \neq x_0 \quad \text{in einer Umgebung von } x_0\,.$$

x_0 heißt Extremalstelle von f, falls x_0 lokale Maximal- oder Minimalstelle ist.

Hinweise: Stellen Sie $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 durch das $n-1$-te Taylorpolynom plus Restglied dar. Aus $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ folgt auch $f^{(n)}(\xi) \neq 0\ \forall\, \xi$ in einer kleinen offenen Umgebung von x_0 (warum?).

Aufgabe 45 (10 Punkte)

Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 + 2x + x|x|}{x - 1}$$

für reelle x. Achten Sie dabei insbesondere auf den Definitionsbereich, stetige Fortsetzbarkeit, Asymptoten, Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte, und skizzieren Sie die Funktion.