

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 14.12.2012)

Aufgabe 46

(10 Punkte)

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_{ab} definiert durch

$$f_{ab}(x) = \frac{\cos(ax) e^{bx^2}}{1 - x^4}$$

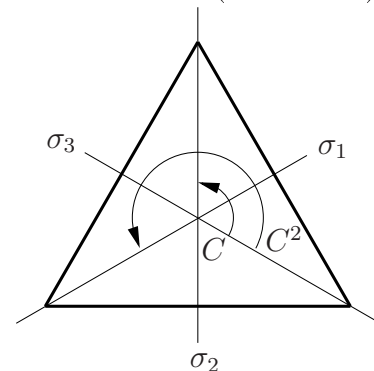
bei Null eine Maximum, für welche ein Minimum? Belegen Sie Ihre Antwort!

HINWEIS: Berechnen Sie keine Ableitungen, verwenden Sie Taylorentwicklungen.

Aufgabe 47

(10 Punkte)

Wir betrachten die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Bezeichnen Sie die Spiegelungen an den Seitenhalbierenden mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, die 120° -Drehung um den Mittelpunkt mit C und die 240° -Drehung um den Mittelpunkt mit C^2 (wieso?). Bestimmen Sie die Gruppentafel. Ist die Gruppe abelsch?



HINWEIS: Gehen Sie analog zum Vorlesungsbeispiel vor, wo wir die Symmetriegruppe eines Rechtecks diskutiert haben.

Aufgabe 48

(10 Punkte)

Sei $G = \{e, a, b, c\}$ und seien (G, \circ) sowie (G, \odot) Gruppen mit neutralem Element e . Weiter gelte $a \circ a = c \circ c = b$ sowie $a \odot a = c \odot c = e$. Konstruieren Sie die Gruppentafeln für (G, \circ) und (G, \odot) , und berechnen Sie $(a \circ b \circ c)^{-1}$ sowie $(a \odot b \odot c)^{-1}$. Sind die Gruppen abelsch?

Aufgabe 49

(10 Punkte)

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren des \mathbb{R}^3 linear abhängig?

a) $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta^2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 50

(10 Punkte)

Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen. Zeigen Sie:

- a) $f(x) = 1$, $g(x) = \cos^2(x)$ und $h(x) = \cos(2x)$ sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.
b) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = \cos(x)$ sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.

HINWEIS: Nehmen Sie in Teil b an, die Funktionen seien linear abhängig und führen Sie dies zum Widerspruch!