

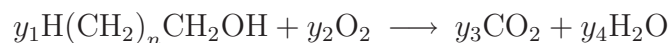
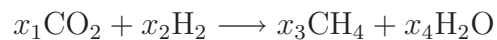
Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 21.12.2012)

Aufgabe 51

(10 Punkte)

Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen



(für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$) ein lineares Gleichungssystem für die Werte x_i bzw. y_j aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahl von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle x_i bzw. y_j positive ganze Zahlen sind.

Aufgabe 52

(10 Punkte)

Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K ? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

a) $M = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$, b) $M = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$ c) $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{C}$

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -x_3, 4x_1 + 2x_3 = 2x_2 \right\}$, $K = \mathbb{R}$

e) $M = \{ \text{Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad } \leq 4 \text{ und Steigung Null im Ursprung} \}$, $K = \mathbb{R}$

Aufgabe 53

(10 Punkte)

Sei $\phi \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$$

linear unabhängig? Stellen Sie, falls möglich, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von \vec{a} und \vec{b} dar.

Aufgabe 54

(10 Punkte)

$V := \text{span}(1, \sin(x), \cos(x))$ ist ein Unterraum von $C([-\pi, \pi])$ mit $\dim V = 3$ (vgl. Aufgabe 50). Sei $L : V \rightarrow V$ definiert durch $L(f) = f'$. Sind die Mengen

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 := \{g \in V \mid \exists f \in V \text{ mit } L(f) = g\}$$

Unterräume von V ? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 55

(10 Punkte)

Überprüfen Sie, ob durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird!

$$\text{a) } V = \mathbb{R}^n, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^n a_j b_j \quad \text{b) } V = \mathbb{R}^3, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2a_1 b_1 + a_2 b_2 + 5a_3 b_3$$

$$\text{c) } V = \mathbb{R}^2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 3a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2 \quad \text{d) } V = \mathbb{R}^2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_2 b_2 - a_1 b_1$$

$$\text{e) } V = \mathbb{R}^2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$$

HINWEIS: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig zeigen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$ mit $\mu_{kj} = \mu_{jk}$.