Universität Tübingen, Mathematisches Institut — Wintersemester 12/13
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 21.12.2012)

Aufgabe 51 (10 Punkte)
Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen

$$x_1\mathrm{CO_2} + x_2\mathrm{H_2} \longrightarrow x_3\mathrm{CH_4} + x_4\mathrm{H_2O}$$

$$y_1\mathrm{H(CH_2)}_n\mathrm{CH_2OH} + y_2\mathrm{O_2} \;\longrightarrow\; y_3\mathrm{CO_2} + y_4\mathrm{H_2O}$$

(für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$) ein lineares Gleichungssystem für die Werte x_i bzw. y_j aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahl von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle x_i bzw. y_j positive ganze Zahlen sind.

Aufgabe 52 (10 Punkte)
Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

a) $M = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$, b) $M = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$ c) $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{C}$

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = -x_3\,,\ 4x_1 + 2x_3 = 2x_2 \right\}$, $K = \mathbb{R}$

e) $M = \{$Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 4 und Steigung Null im Ursprung $\}$, $K = \mathbb{R}$

Aufgabe 53 (10 Punkte)
Sei $\phi \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

linear unabhängig? Stellen Sie, falls möglich, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

Aufgabe 54 (10 Punkte)

$V := \operatorname{span}(1, \sin(x), \cos(x))$ ist ein Unterraum von $C([-\pi, \pi])$ mit $\dim V = 3$ (vgl. Aufgabe 50). Sei $L : V \to V$ definiert durch $L(f) = f'$. Sind die Mengen

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 := \{g \in V \mid \exists\, f \in V \text{ mit } L(f) = g\}$$

Unterräume von V? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 55 (10 Punkte)

Überprüfen Sie, ob durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird!

a) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ b) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2a_1b_1 + a_2b_2 + 5a_3b_3$

c) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 3a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2$ d) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_2b_2 - a_1b_1$

e) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

Hinweis: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig zeigen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$ mit $\mu_{kj} = \mu_{jk}$.