Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 11.01.2013)

Aufgabe 56 (10 Punkte)

Seien U und V Unterräume des $\mathbb{R}^{12}$ mit $\dim U = 6$ und $\dim V = 7$ und Basen $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_6$ von U und $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_7$ von V. Welche Werte kann

$$\dim \operatorname{span}\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_6, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_7\right)$$

annehmen (mit Begründung)? Geben Sie für jeden Fall explizit ein Beispiel an (z.B. durch Angabe geeigneter $\vec{a}_j$ und $\vec{b}_j$)!

Aufgabe 57 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie eine ON-Basis für $U \subset \mathbb{R}^4$,

$$U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right),$$

bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine ON-Basis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 55c. Beginnen Sie mit den l.u. Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 58 (10 Punkte)

Betrachten Sie das LGS

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b} \qquad x_j \in \mathbb{R}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bilden Sie das Kreuzprodukt mit $\vec{a}_2$ von rechts und anschießend das Skalarprodukt des Ergebnisses mit $\vec{a}_3$. Lösen Sie nun – wenn möglich – nach x_1 auf.
b) Beschaffen Sie sich analoge Lösungsformeln für x_2 und x_3.
c) Welche Bedingung müssen die $\vec{a}_j$ erfüllen, damit Sie mithilfe der Formeln aus a und b wirklich die Lösung des LGS erhalten?

Aufgabe 59 (10 Punkte)

a) Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene E_1 im $\mathbb{R}^3$,

$$-2x_1 - 6x_2 + x_3 = 3.$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform dieser Ebene an. Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

b) Die Ebene E_2 im $\mathbb{R}^3$ ist durch

$$E_2 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = s\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\2\\9\end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}\right\}$$

definiert. Geben Sie die Hessesche Normalform dieser Ebene an und berechnen Sie die Schnittmenge von E_2 mit E_1.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!