

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe am 18.01.2013)

Aufgabe 60

(10 Punkte)

Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

bilden (an jedem Punkt) (a) eine ONB des \mathbb{R}^3 und (b) ein Rechtssystem (in der angegebenen Reihenfolge). Berechnen Sie außerdem (c) die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten, d.h. berechnen Sie $\dot{\vec{x}}$ für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t)) \cos(\phi(t)) \\ \sin(\theta(t)) \sin(\phi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

und drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination von \vec{e}_r , \vec{e}_θ und \vec{e}_ϕ aus.

Aufgabe 61

(10 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Kurven und berechnen Sie jeweils die Geschwindigkeit sowie deren Betrag:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(2t) \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} (1 + \cos t) \cos t \\ (1 + \cos t) \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Zeichnen Sie auch $\dot{\vec{y}}(0)$, $\dot{\vec{y}}(\frac{\pi}{2})$, und $\dot{\vec{y}}(\frac{3\pi}{2})$ als Tangentialvektoren ein.

Aufgabe 62

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden Punkte im \mathbb{R}^2 :

- a) $(1, 1)$ b) $(-3, 2)$ c) $(1, -\sqrt{3})$ d) $(-5, -4)$

Geben Sie die folgenden Punkte im \mathbb{R}^3 in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an:

- e) $(\pi, 0, 0)$ f) $(0, 3, 0)$ g) $(0, 1, 1)$ h) $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$

Aufgabe 63

(10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a) AA^T , b) $A^T A$, c) $AA^T B$, d) $A^T AB$,
e) $B^T AA^T$, f) A^2 , g) $A^T AA^T A$.