

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (Abgabe am 25.01.2013)

Aufgabe 64

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie damit die Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $X \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ und $Y \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ von

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 4 & 7 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad AY = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 65

(10 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{10}$$

HINWEIS: Zur Definition von A^n siehe Aufgabe 66.

Aufgabe 66

(10 Punkte)

Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix gemäß

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \dots$$

Weiter definieren wir e^{Ax} für $x \in \mathbb{R}$ durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h. $e^{Ax} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$. Berechnen Sie e^{Ax} für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

HINWEISE: (i) Berechnen Sie zunächst A^2 . Folgern Sie daraus wie A^{2n} und A^{2n+1} aussehen. (ii) Aus der Matrixaddition (komponentenweise) folgt natürlich

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 67

(10 Punkte)

Zeigen Sie: $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \cdot)$ mit

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det A = 1\}$$

und dem Matrixprodukt \cdot ist eine nicht-abelsche Gruppe.**Aufgabe 68**

(10 Zusatzpunkte)

Erreichen Sie bis spätestens 3.2.13 auf www.khanacademy.org *Proficiency* in den *Skills* *Multiplying a matrix by a vector*, *Multiplying a matrix by a matrix* und *Matrix determinant*.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 11.