Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 12/13

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 13.02.2013

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 115 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (6+3 = 9 Punkte)

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=1}^{n}(4\nu-1) = 2n^2+n \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

b) Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{4\nu-1}{n^2}\,.$$

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3+3 = 18 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)^2}{(1-\mathrm{e}^x)^6}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x}-\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^{10}-1024}{x-2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\big(\log(2x^2+7)-2\log(x-1)\big)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\sin(x)}{2x^2-7x^3}$ f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2-n}$

Aufgabe 3 (4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{10}\cos(\pi\nu)$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}3^{n-k}$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=\nu}^{n}\frac{\mu\,3^\nu}{3^{\mu+1}-1}$

Aufgabe 4 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

a) Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

(i) $\displaystyle\frac{7}{\pi^4+x^4}$ (ii) $\displaystyle\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x}$ (iii) $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}$ (stetig fortgesetzt bei $x=0$)

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von e^{-x} um $x_0 = 7$, und geben Sie an, wo diese konvergiert.

Aufgabe 5 (2+2+3+2+3+4 = 16 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2 + x|x| - 4}{2x^2 - 2}.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.
b) Wo ist f stetig fortsetzbar und wie?
c) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
d) Berechnen Sie alle Nullstellen.
e) Berechnen Sie $f'(x)$.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe 6 (4+2+2+2 = 10 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie A^2 und A^3.
b) Berechnen Sie $\det A$.
c) Bestimmen Sie A^{-1}.
d) Bestimmen Sie alle $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, die $AX = B$ erfüllen.

Aufgabe 7 (2+2+6 = 10 Punkte)

Auf dem $\mathbb{R}^2$ ist durch

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2, \quad \text{wobei } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

ein Skalarprodukt definiert. Sei $\vec{e}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{e}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Berechnen Sie $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$.
b) Berechnen Sie $\|\vec{e}_1\| := \sqrt{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle}$.
c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Aufgabe 8 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

a) $\dfrac{40 - 10\mathrm{i}}{5 + 3\mathrm{i}}$ b) $\mathrm{e}^{1 - \mathrm{i}\pi/2}$ c) $\sin(x + \mathrm{i}y)$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

Hinweis: $\sin z = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/(2\mathrm{i})$

Aufgabe 9 (4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{x+2}{x+1}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ c) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^{x^2} \frac{t^2-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

Hinweis: $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$