Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 12/13

# Mathematik I für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 10.04.2013

---

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 118 Punkte erreichbar, 86 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 43 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

---

**Aufgabe 1** (8 Punkte)
Zeigen Sie für $x \neq 1$ und für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu x^{\nu-1}(x-1)^2 = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\,.$$

**Aufgabe 2** (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)
Bestimmen Sie folgende Grenzwerte oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \sin(x+n\pi)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5(\cos x - 1)}{\sin^7 x}$ c) $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}} \dfrac{\sin(\pi x/\mathrm{e})}{\log(\log x)}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2-1)\sin^2 x + (x^2+1)\cos^2 x}{3x^2-2x+1}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2 - \sqrt{n^4 - 3n^2 + 2}\right)$

**Aufgabe 3** (4+4+4+4 = 16 Punkte)
Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten).

a) $\sum\limits_{\nu=0}^{100} \cos(\pi\nu)$ b) $\sum\limits_{k=3}^{n} 7^{n-k}$ c) $\sum\limits_{\mu=0}^{n}\sum\limits_{\nu=\mu}^{n} \dfrac{\nu\, 2^\mu}{2^{\nu+1}-1}$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{\nu=0}^{n} \dfrac{x^n}{\nu!(n-\nu)!}$

**Aufgabe 4** (4+4+4+4 = 16 Punkte)
Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt) und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\mathrm{e}^{x+\pi}$ um Null b) $\dfrac{\sin(x)-x}{x^2}$ um Null

c) $\mathrm{e}^{x+\pi}$ um $x_0 = \pi$ d) $\dfrac{1}{(1-\pi x)(1+x)}$ um Null

**Aufgabe 5** (2+2+3+2+3+4 = 16 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2 - x|x| - 4}{2x^2 - 2}.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f$.
b) Wo ist $f$ stetig fortsetzbar und wie?
c) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
d) Berechnen Sie alle Nullstellen.
e) Berechnen Sie $f'(x)$.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

**Aufgabe 6** (4+4+2+3 = 13 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $A^2$ und $\det A$.
b) Bestimmen Sie $A^{-1}$.
c) Berechnen Sie $A + A^{-1} - A^2$.
d) Bestimmen Sie alle $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, die $AX = B + A^2B$ erfüllen.

**Aufgabe 7** (2+2+6 = 10 Punkte)

Auf dem Vektorraum $C([0,2])$ der stetigen Funktionen $[0,2] \to \mathbb{R}$ ist durch

$$\langle f, g\rangle := \int_0^2 f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt definiert. Sei $f_1(x) = 1$ und $f_2(x) = x$.

a) Berechnen Sie $\langle f_1, f_2\rangle$.
b) Berechnen Sie $\|f_1\| := \sqrt{\langle f_1, f_1\rangle}$.
c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U := \operatorname{span}(f_1, f_2)$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

**Aufgabe 8** (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

a) $\dfrac{40\mathrm{i} + 10}{5\mathrm{i} - 3}$ b) $\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i} + \log 5}$ c) $\cosh(\mathrm{i}y)$, wobei $y \in \mathbb{R}$.

Hinweis: $\cosh x = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$.

**Aufgabe 9** (4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(1+x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^3} \frac{1-u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$

Hinweis: $(\arcsin x)' = (1-x^2)^{-1/2}$