Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 4

Aufgabe 13: Mengenlehre ($\{a\}, \{b\}$ je ein $\times$)

a) Es sei X eine Menge und es seien $A, B, C \subseteq X$ Teilmengen. Zeige, dass $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

b) Weiter seien I, J Indexmengen und es seien $(A_i)_{i \in I}$ sowie $(B_j)_{j \in J}$ Familien von Teilmengen von X. Zeige, dass

i) $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i \cup \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} A_i \cup B_j$;

ii) $\displaystyle X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$.

Aufgabe 14: Normierter Raum ($\{a, b, c\}, \{d\}, \{e\}$ je ein $\times$)

a) Zeige, dass $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ein normierter Raum ist. Dabei ist $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm;

b) Zeige, dass $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ ein normierter Raum ist. Dabei ist $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

c) Zeige, dass $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum ist. Dabei ist $\|\cdot\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ die Maximumsnorm;

d) Skizziere für $\mathbb{R}^2$ die Einheitskugeln $\{x | \|x\| = 1\}$ der in den Aufgabenteilen (a) – (c) untersuchten Normen;

e) Zeige weiter, dass auf jedem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ eine Metrik durch $d : V \times V \longrightarrow [0, \infty)$, $d(x, y) := \|x - y\|$ definiert wird.

Aufgabe 15: Cauchy-Schwarz-Ungleichung ($\{a\}, \{b\}$ je ein $\times$)

a) Zeige, dass $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ein euklidischer Vektorraum ist.

b) Zeige die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hinweis: Verwende $a \cdot b \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$.

Aufgabe 16: Positivität von Metriken (Ein $\times$)

Es sei $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, mit den Eigenschaften (M1) – (M3) einer Metrik. Zeige dass, $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y$.