Universität Tübingen
Mathematisches Institut Wintersemester 2012
C. Hainzl

# Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 5

**Aufgabe 17: Definition der Folgenkonvergenz** (Ein $\times$)
Wir gehen von folgender Definition aus:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad |x_n - x| < \varepsilon\,.$$

Welche der folgenden Aussagen liefert eine äquivalente Definition der Folgenkonvergenz?

a) $\forall \varepsilon \geq 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad |x_n - x| \leq \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_\varepsilon \quad |x_n - x| < \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad |x_n - x| \leq \varepsilon$

**Aufgabe 18:** (Ein $\times$)

Berechne

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

**Aufgabe 19:** (Ein $\times$)

Zeige für die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{c_0 + c_1 n + \ldots + c_p n^p}{d_0 + d_1 n + \ldots + d_q n^q},$$

wobei $c_p \neq 0$, $d_q \neq 0$ und $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \frac{c_p}{d_q}, \text{ falls } p = q \\ 0 \text{ falls } p < q. \end{cases}$$

**Aufgabe 20:** (Ein $\times$)

Sei $(x_n)$ eine Folge im metrischen Raum $(X, d)$. Zeige:
Konvergieren die Teilfolgen $(x_{2n})$, $(x_{2n+1})$ und $(x_{3n})$, so konvergiert auch $(x_n)$. Gilt dies auch, wenn nur die Konvergenz von $(x_{2n})$, $(x_{2n+1})$ bekannt ist?

**Aufgabe 21:** (Ein $\times$)

Gegen welchen Grenzwert konvergiert die rekursive Folge

$$a_{n+1} := \frac{a_n + 5}{2}, \quad a_1 := 0\ ?$$

**Aufgabe 22: Eigenschaften von Folgen** ($\{a\}, \{b\}, \{c\}$ je ein $\times$)
Beweise:

a) Jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den gleichen Grenzwert.

b) Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|y_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $(x_n y_n)$ eine Nullfolge.

c) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge mit Grenzwert $x$, so ist für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{|x_n|} = \sqrt[m]{|x|}.$$

**Aufgabe 23:** (Ein $\times$)

Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz und gebe gegebenenfalls abhängig von $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, so dass für alle $n \geq n_0$ der Abstand vom Grenzwert kleiner als $\varepsilon$ ist:

a) $a_n = 7 - \frac{1}{n^3}$,

b) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2$,

c) $a_n = -1 + \frac{(-1)^n}{n+4}$.