Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 6

Aufgabe 24: Nullfolgen (Ein $\times$)

Zeige oder widerlege die Aussage, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist für

a) $a_n = \frac{n+10^6}{n^2+1}$,

b) $a_n = n\, q^n$ mit $|q| < 1$,

c) $a_n = n!\, q^n$ mit $|q| < 1$,

d) $a_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$.

Aufgabe 25: (Ein $\times$)

Berechne den Grenzwert der Folge

$$x_n := \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1)}{n^3} = \frac{\sum_{k=1}^n k\cdot(k+1)}{n^3}.$$

Aufgabe 26: (Ein $\times$)

Zeige, dass Folge $(x_n)_{n\geq 0}$, definiert durch $x_n = (-1)^n$ nicht konvergiert.

Aufgabe 27: (Ein $\times$)

Sei $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Sei

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{c} \\ x_2 &= \sqrt{c+\sqrt{c}} \\ x_3 &= \sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}} \\ &\vdots \\ x_n &= \underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c \qquad\qquad +\sqrt{c}}}}_{n \text{ Wurzeln}}. \end{aligned}$$

Zeige, dass die Folge konvergiert und berechne den Grenzwert.
Hinweis: Zeige (etwa mit Induktion), dass $x_n \leq \sqrt{c}+1$.

Aufgabe 28: Dreifolgensatz (Ein $\times$)

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

und

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist auch $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.