Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 7

Aufgabe 29: Injektivität und Surjektivität (Ein $\times$)

a) Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, welche surjektiv, welche beides?

   i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$,

   ii) $f_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$,

   iii) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto 1/n$.

b) Gebe eine Bijektion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ an und skizziere den Graphen!

c) Seien $g : M \to N$, $f : N \to S$ Funktionen. Die Komposition von g und f ist definiert durch

$$f \circ g : M \to S,\ x \mapsto f\big(g(x)\big).$$

Sei $f \circ g$ bijektiv. Welche Eigenschaften folgen daraus für f und g (mit Begründung)?

   i) f injektiv, ii) f surjektiv, iii) g injektiv, iv) g surjektiv.

Aufgabe 30: Mächtigkeiten ($\{a, b\}, \{c\}, \{d\}$ je ein $\times$)

Zeige folgende Aussagen:

a) Sei M abzählbar. Dann ist $M \times M$ abzählbar.

b) Sei M eine Familie von offenen disjunkten Intervallen in $\mathbb{R}$, d.h. M ist eine Menge, deren Elemente nicht-überlappende offene Intervalle in $\mathbb{R}$ sind. Dann ist M abzählbar.
Erinnerung: Ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ hat die Form $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ mit $a < b$.

c) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer abzählbar-unendlichen Menge M ist überabzählbar, wobei die Potenzmenge einer Menge M die Menge aller Teilmengen von M bezeichnet.

Tipp: Definiere eine Abbildung, die jedem Element P der Potenzmenge (P ist also ein Teilmenge von M!) eine Folge von Nullen und Einsen zuordnet, aus der hervorgeht, welche Elemente von M in P enthalten sind. Argumentiere dann analog zur Vorlesung!

d) Die Vereinigung abzählbar vieler Mengen, die selbst abzählbar sind, ist abzählbar.

Aufgabe 31: (Ein $\times$)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = a.$$

Aufgabe 32: Der Logarithmus ($\{a\}, \{b\}$ je ein $\times$)

a) Zeige unter Verwendung des Exponentialgesetzes,

$$\exp(0) = 1, \qquad \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y),$$

dass für $x, y \in (0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

i) $\ln(xy) \;=\; \ln(x) \,+\, \ln(y)$,

ii) $\ln(x/y) \;=\; \ln(x) \,-\, \ln(y)$,

iii) $\ln(x^n) \;=\; n\ln(x)$.

b) Zeige ebenfalls unter Verwendung des Exponentialgesetzes, dass für $x > -1$ und $x \neq 0$ gilt

$$\ln(1+x) \;<\; x.$$

Aufgabe 33: Stetige Funktionen und der Zwischenwertsatz ($\{a\}, \{b\}$ je ein $\times$)

a) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeige, dass

i) das Produkt $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ stetig ist,

ii) die Verknüpfung $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(g(x))$ stetig ist.

b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige die folgenden Aussagen:

i) f ist beschränkt. (*Tipp:* Widerspruchsbeweis!)

ii) f nimmt Infimum und Supremum an, d.h. es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{\min}) = \inf_{[a,b]} f := \inf\{f(x) | x \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad f(x_{\max}) = \sup_{[a,b]} f.$$

Aufgabe 34: Bestimme alle Häufungspunkte der Folge ($\{a\}, \{b\}$ je ein $\times$)

a) $\left(\frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{1}{n}\right)(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$,

b) $\left(\frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$.

Hier ist $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$ die Gaußklammer.