Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 8

Aufgabe 35: ($\{a\}, \{b\}$ je ein $\times$)

Stetige Funktionen und der Zwischenwertsatz (Fortsetzung)

a) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = x$.

b) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ zusätzlich Lipschtiz-stetig, d.h. $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ mit $L < 1$. Zeige, f hat genau einen Fixpunkt.
Hinweis: Konstruiere eine Folge mittels $x_{n+1} = f(x_n)$. Benutze nun $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq L|x_n - x_{n-1}|$ um zu zeigen, dass (x_n) eine Cauchyfolge mit Grenzwert in $[0,1]$ ist. Benutze die Stetigkeit für die Existenz und die Lipschitzbedingung für die Eindeutigkeit des Fixpunktes.

Aufgabe 36: Polardarstellung komplexer Zahlen ($\{a\}, \{b\}$ je ein $\times$)

a) Bestimme die Polardarstellung von

   i) $z_1 = \mathrm{i} + 1$,
   ii) $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

   Berechne weiter $z_1^2\, \overline{z_2}^3$ einmal direkt und einmal unter Verwendung der Polardarstellung.

b) Bestimme alle fünften Wurzeln von i und alle dritten Wurzeln von $\frac{27}{\sqrt{2}}(-1 + \mathrm{i})$.

Aufgabe 37: Sinus und Kosinus im Komplexen ($\{a\}, \{b\}$ je ein $\times$)

a) Die Funktionen $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert man durch

$$\cos(z) := (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/2, \quad \sin(z) := (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/(2\mathrm{i}).$$

   i) Bestimme alle Nullstellen von cos und sin in $\mathbb{C}$.
   ii) Zeige, dass die Additionstheoreme auf ganz $\mathbb{C}$ gelten.

b) Weiterhin definiert man die Hyperbelfunktionen $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\cosh(z) := \cos(\mathrm{i}z), \quad \sinh(z) := \sin(\mathrm{i}z)/\mathrm{i}.$$

   i) Was ergibt sich für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}z = 0$? Wie sehen also Hyperbelfunktionen auf $\mathbb{R}$ aus?
   ii) Berechne $\cosh^2(z) - \sinh^2(z)$.

Aufgabe 38: Konvergenz ($\{a\}, \{b\}$ je ein $\times$)

Beweise die folgenden Aussagen:

a) Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist konvergent, und es gilt $\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i \| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$.

b) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergent und $|x_n| \leq y_n$ für n groß genug. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut konvergent.