Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 9

Aufgabe 39: Konvergente Reihen? ($\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ je ein $\times$)

Für welche der Folgen (x_n) und welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$? Beweise die Antwort.

a) $x_n \;=\; 1/n^\alpha$,

b) $x_n \;=\; \frac{(-1)^n n^2 + n}{n^3}$,

c) $x_n \;=\; \binom{5n}{4n}^{-1}$,

d) $x_n \;=\; (\alpha + 1/n)^n$.

Aufgabe 40: Doppelreihen ($\{a\}, \{b\}$ je ein $\times$)

a) Sei $|z| < 1$. Zeige mit Hilfe des Produktsatzes, dass gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \;=\; 1/(1-z)^2.$$

b) Zeige mit Hilfe des Umordnungsatzes, dass $\sum_{m,n=1}^{\infty} 1/(m^2+n^2)$ divergiert, jedoch $\sum_{m,n=1}^{\infty} 1/(m^3+n^3)$ konvergiert.

Aufgabe 41: Limes superior und limes inferior (Ein $\times$)

a) Bestimme lim inf und lim sup der Folgen

i) $x_n \;=\; (-1)^n$,

ii) $y_n \;=\; \big(1 + (-1)^n/n\big)^n$.

b) Sei (x_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und

$$x^* \;:=\; \limsup_{n\to\infty} x_n, \qquad x_* \;:=\; \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Zeige

i) Die Folge (x_n) konvergiert genau dann, wenn $x^* = x_*$ und in diesem Fall gilt

$$\lim x_n \;=\; x^* \;=\; x_*.$$

ii) Es gilt

$$\begin{aligned} x^* &= \lim_{n\to\infty} \sup\,\{x_k \,|\, k \geq n\}, \\ x_* &= \lim_{n\to\infty} \inf\,\{x_k \,|\, k \geq n\}. \end{aligned}$$

Tipp: Zeige zunächst, dass die Folgen $(\sup\{x_k \,|\, k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\inf\{x_k \,|\, k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich konvergieren. Prüfe dann jeweils, dass der Grenzwert sowohl $\leq$ als auch $\geq$ der linken Seite ist.

Aufgabe 42: (Ein $\times$)

Sei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler von n. (z.B. wird 4 von $1, 2, 4$ geteilt, deshalb ist $\tau(4) = 3$).

Sei x positiv. Untersuche die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot x^n$$

mit dem Wurzelkriterium. Ist auch das Quotientenkriterium für alle $x < 1$ anwendbar?

Hinweis: Betrachte den Spezialfall $x = \frac{3}{4}$ und den Quotienten aus $p+1$-tem und p-tem Koeffizienten, falls p eine Primzahl ist.

Aufgabe 43: (Ein $\times$)

Bestimme das Cauchyprodukt der beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

für $x \in (0, 1)$.