# Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 1

**Aufgabe 1:**

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper. Zeige:

a) Das multiplikative 1-Element ist eindeutig bestimmt.

b) Für jede $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0$ wird die Gleichung $a \cdot x = b$ durch $x = b \cdot a^{-1}$ gelöst.

c) Die Lösung in b) und insbesondere das multiplikative Inverse sind eindeutig.

**Aufgabe 2:**

a) Sei $\mathbb{K} := \{0, 1, 2\}$ mit den Operationen

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Zeige, dass $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper ist. Ist $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ angeordnet (wenn ja: gib die Ordnungsrelation explizit an)?

b) Zeige, dass $\{a + b \cdot \sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit den üblichen Operationen $+, \cdot$ ein Körper ist.

**Aufgabe 3:**

Entscheide mit Begründung, ob die folgenden Mengen Körper sind, und wenn ja, ob sie angeordnet sind.

a) $\mathbb{N}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation,

b) $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation,

c) $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation,

d) $\mathbb{F}_2 = \{a, b\}$ mit den Operationen, $+$ und $\cdot$, definiert durch

$$\begin{array}{c|cc} + & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & a \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & a & b \end{array}$$

**Aufgabe 4:**

Gegeben sei ein geordneter Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Man beweise:

$$\forall x, y \in \mathbb{K} \ \forall z \in \mathbb{K}, \ z < 0 : \ x < y \ \Leftrightarrow x \cdot z > y \cdot z.$$