Mathematatik für Physiker I

Übungsblatt 10

Aufgabe 44: Konvergente Reihen (Ein $\times$)

Zeige:

a) Konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$ und es gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right).$$

b) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$.

Aufgabe 45: Konvergenzradien von Potenzreihen ($\{a\}, \{b\}$ je ein $\times$)

Bestimme für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius ($z \in \mathbb{C}$):

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} z^n \text{ mit } k \in \mathbb{N} \quad , \quad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n \ .$$

Hinweis: Verwende $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ für den Aufgabenteil a) und die Abschätzung

$$\mathrm{e} \left(\frac{n}{\mathrm{e}} \right)^n < n! < n\, \mathrm{e} \left(\frac{n}{\mathrm{e}} \right)^n \quad \forall\, n \geq 2 \ .$$

für den Aufgabenteil b).

Aufgabe 46: Basen (Ein $\times$)

a) Gegeben sei der Unterraum $U := \{x \in \mathbb{R}^4 |\ x_1 = x_3\} \subset \mathbb{R}^4$. Bestimme eine Basis von U.

b) Es sei $P_{\mathbb{R}}^{(4)}$ der Vektorraum der Polynome vom Grade höchstens 4. Es seien $q_1, q_2, q_3 \in P_{\mathbb{R}}^{(4)}$ gegeben durch

$$q_1(x) := x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad , \quad q_2(x) := x^3 \quad , \quad q_3(x) := x - 1 \ .$$

Ergänze (q_1, q_2, q_3) zu einer Basis von $P_{\mathbb{R}}^{(4)}$.

Aufgabe 47: Projektionen (Ein $\times$)

Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^2} \neq 0$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Wir betrachten die lineare Abbildung $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\mathbb{R}^2 \ni u \mapsto P\, u := w \frac{\langle v, u \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^2}} \ .$$

a) Zeige, dass P eine Projektion ist, das heißt die Beziehung $P^2 = P$ erfüllt.

b) Bestimme den Kern und das Bild der Abbildung P.

Aufgabe 48: Matrix-wertige Potenzreihen (Ein $\times$)

Analog zu komplexen Potenzreihen können wir auch Matrix-wertige Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k A^k$$

definieren, wobei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine komplexe Folge und $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine komplexwertige $n \times n$-Matrix bezeichnet. Ferner steht $A^0 := E_n$ für die Einheitsmatrix und A^k $(k \geq 1)$ für die k-fache Matrizenmultiplikation von A mit sich selbst.

In diesem Zusammenhang setzen wir für $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$:

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \ .$$

Zeige für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, dass

$$\exp\left[\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} .$$

Hinweis: Die Kosinus- und Sinus-Funktionen haben folgende Reihendarstellungen ($z \in \mathbb{C}$):

$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad , \quad \sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \ .$$

Aufgabe 49: Lineare Abbildungen und Basiswechsel ($\{a, b\}, \{c\}$ je ein $\times$)

a) Finde die zur linearen Abbildung $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gehörige Matrix A, sodass

$$L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist.

b) Finde die zur linearen Abbildung $L_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gehörige Matrix B, sodass

$$L_B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad L_B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist, indem man wie in der Vorlesung gezeigt geeignete Drehmatrizen benutzt, um L_B auf L_A zurückzuführen.

c) Sei $\mathcal{K} = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und $\tilde{\mathcal{K}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ eine weitere Basis mit

$$\tilde{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Seien nun $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Bestimme nun die Zahlen $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ (in Abhängigkeit von x und y), sodass die Gleichung

$$xe_1 + ye_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{x}\tilde{e}_1 + \tilde{y}\tilde{e}_2$$

erfüllt ist.