Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 11

Aufgabe 50: Direkte Summe von Vektorräumen (Ein $\times$)

Seien zwei Vektorräume V und W über $\mathbb{K}$ gegeben, mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Das kartesische Produkt $V \times W$ wird durch die Verknüpfungen

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)\,, \quad \lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w)$$

ebenfalls zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum, der die direkte Summe $V \oplus W$ heißt.

Zeige, dass $\dim(V \oplus W) = n + m$ gilt.

Aufgabe 51: Bild und Kern (Ein $\times$)

Bestimme für die folgenden linearen Abbildungen jeweils $\mathrm{Kern}(L_j)$, $\mathrm{Bild}(L_j)$, $\dim(\mathrm{Kern}(L_j))$ und $\dim(\mathrm{Bild}(L_j))$.

a) $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto a \times x$, d.h. das Kreuzprodukt mit einem festen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$.
Zur Erinnerung: $(a_1, a_2, a_3) \times (x_1, x_2, x_3) := (a_2 x_3 - a_3 x_2, a_3 x_1 - a_1 x_3, a_1 x_2 - a_2 x_1)$.

b) $L_2 : V \oplus V \to V$, $(v, w) \mapsto v - w$, wobei $\dim(V) = n$ sei.

Aufgabe 52: Lineare Abbildungen auf $P_{\mathbb{R}}$ (Ein $\times$)

a) Gibt es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to P_{\mathbb{R}}^{(2)}$ mit $L(1, 2, 3) = x^2 - 1$, $L(0, 2, 1) = 3x + 4$, $L(-1, 0, -2) = x^2 + x + 1$?

b) Bestimme die Matrixdarstellung des Ableitungsoperators $\mathrm{D} : P_{\mathbb{R}}^{(4)} \to P_{\mathbb{R}}^{(4)}$, $p \mapsto p'$ bezüglich der Monombasis.

Aufgabe 53: Drehmatrizen im $\mathbb{R}^3$ (Ein $\times$)

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die Drehungen X_i, $i = 1, 2, 3$ um $\pi/2$ im positiven Drehsinn um die x_i-Achse (bei rechtshändiger Anordnung der Achsen). Bestimme die zugehörigen Matrizen bzgl. der kanonischen Basis sowohl für X_i als auch für X_i^{-1}. Bestimme durch geometrische Betrachtungen $X_1^{-1} X_2 X_1$ und überprüfe Dein Ergebnis indem Du die Matrixmultiplikation ausführst.

Aufgabe 54: Isomorphismen (Ein $\times$)

Seien V, W Vektorräume und $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V. Zeige, dass die lineare Abbildung $L : V \to W$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $(Lv_1, ..., Lv_n)$ eine Basis von W ist.

Aufgabe 55: (Ein $\times$)

Berechne alle möglichen Produkte unter folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$