Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 12

Aufgabe 56: Zeilenstufenform (Ein ×)

Bestimme den Rang der folgenden Matrix, indem Du sie auf Zeilenstufenform bringst.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 57: Matrizen invertieren (Ein ×)

Invertiere die folgenden Matrizen. Gib explizit an, für welche Werte des Parameters $\lambda \in \mathbb{C}$ dies möglich ist.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i}\lambda & -1 & \mathrm{i}\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 3\mathrm{i} & \lambda \end{pmatrix}$

Aufgabe 58: Basiswechsel (Ein ×)

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig. Wir betrachten die lineare Abbildung $P_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die $v = \alpha a + \beta b$ auf

$$P_{a,b} v = \alpha a$$

abbildet. Was ist die geometrische Bedeutung dieser Abbildung? Bestimme die Matrix zu $P_{a,b}$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (a, b)$ und bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{K} = (e_1, e_2)$.

b) Es seien die Basen

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2+2\mathrm{i} \\ 2-2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

des Vektrorraums $\mathbb{C}^2$ gegeben. Dabei sind $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$ etc. die Darstellungen der Basisvektoren bezüglich der kanonischen Basis. Berechne die zugehörige Transformationsmatrix.

Aufgabe 59: Der Rang bei Kompositionen (Ein ×)

Sei $A \in M(l \times m, \mathbb{K})$ und $B \in M(m \times n, \mathbb{K})$. Zeige, dass dann

$$\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) - m \leq \operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\}$$

gilt. Unter welcher Bedingung gilt jeweils Gleichheit?

Hinweis: Betrachte die Matrizen als lineare Abbildungen und verwende die Dimensionsformel für $L := A|_{\mathrm{Bild}(B)}$.