Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 14

Aufgabe 66: Kompaktheit in metrischen Räumen (Ein $\times$)

Sei $X = \mathbb{R}^n$ oder $X = \mathbb{C}^n$ und $K \subset X$ so, dass alle Folgen $(x_n) \subset K$ einen Häufungspunkt in K haben. Beweise: K ist kompakt.

Aufgabe 67: Links- und rechtsseitiger Grenzwert ({a}, {b}, {c} je ein $\times$)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Beweise:

a) In jedem $x_0 \in (a, b)$ existiert der links- und der rechtsseitige Grenzwert von f, d.h. es existieren

$$f(x_0-) := \lim_{x\to x_0} f\,|_{[a,x_0)}(x) \quad \text{und} \quad f(x_0+) := \lim_{x\to x_0} f\,|_{(x_0,b]}(x).$$

b) Falls $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ surjektiv ist, folgt, dass f stetig ist.

c) f hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.
Tipp: Zeige zunächst, dass $\omega(x) := f(x+) - f(x-) > 1/n$ nur für endlich viele x gelten kann.

Aufgabe 68: Unterhalbstetigkeit ({a}, {b}, {c}, {d} je ein $\times$)

Sei $f : \mathbb{R} \supset A \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir definieren, dass f *unterhalbstetig* im Punkt x_0 ist, wenn für alle Folgen $(x_n) \subset A$ mit $x_n \to x_0$ gilt, dass

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_0).$$

a) Beweise: f ist unterhalbstetig in $x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in A : (|x - y| < \delta \Rightarrow f(y) > f(x) - \varepsilon)$.

b) Seien

$$f_1 : [0, 2] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} -x & \text{für } x \leq 1, \\ x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

und

$$f_2 : [0, 2] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} -x & \text{für } x < 1, \\ x & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Sind f_1, f_2 unterhalbstetig?

c) Welche Bedingung muss an $B \subset A$ gestellt werden, damit die Indikatorfunktion

$$1_B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B, \\ 0 & \text{für } x \notin B \end{cases}$$

unterhalbstetig ist?

d) Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Menge und sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine unterhalbstetige Funktion. Zeige: f nimmt auf X das Infimum an.

Aufgabe 69: Gleichmäßige Stetigkeit (Ein $\times$)

Zeige, dass für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus der Bedingung

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq \sqrt{\ln(1 + |x - y|)}$$

folgt, dass f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 70: Beispiel zu rechts- und linksseitigem Grenzwert (Ein $\times$)

Berechne den rechts- und linksseitigen Grenzwert folgender Funktion bei $x = 2$. Handelt es sich um eine Sprungstelle oder ist die Funktion bei 2 stetig fortsetzbar?

$$f(x) = \frac{x^2 - 14x + 24}{|x - 2| + |x^2 - 4|}$$

Aufgabe 71: Funktionenfolgen (Ein $\times$)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $\operatorname{supp} f \subset [-1, 1]$. Dabei ist der *Träger* (engl. support) einer Funktion definiert als

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Seien die Funktionenfolgen f_n, g_n und h_n gegeben zu

$$f_n(x) = f(x - n), \quad g_n(x) = f(nx), \quad h_n(x) = \frac{1}{n} f(nx).$$

Beweise: f_n, g_n und h_n konvergieren jeweils punktweise gegen eine geeignete Grenzfunktion. Gib diese an. Zeige weiterhin, dass h_n gleichmäßig konvergiert.