C. Hainzl
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2012/2013
22.10.2012

Mathematik für Physiker I
Übungsblatt 2

Aufgabe 5: Induktionsbeweise (a ein Kreuz, b ein Kreuz)

Zeige mit vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

b) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

Aufgabe 6: Definition der natürlichen Zahlen (ein Kreuz)

Wir haben in der Vorlesung $\mathbb{N}$ als die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert. In dieser Aufgabe zeigst Du, dass $\mathbb{R}$ tatsächlich eine eindeutige kleinste induktive Teilmenge besitzt und $\mathbb{N}$ somit wohldefiniert ist.
Sei dazu $\mathcal{M}$ die Menge aller induktiven Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}$. Zeige, dass

a) $\mathcal{M}$ nicht leer ist,

b) die Schnittmenge aller induktiven Teilmengen $N := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$ wieder induktiv und somit nicht leer ist,

c) N die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, also $N \subseteq M$ für jedes $M \in \mathcal{M}$,

d) N eindeutig bestimmt ist, also, dass falls N' induktiv ist und ebenfalls $N' \subseteq M$ für alle $M \in \mathcal{M}$ erfüllt, schon $N' = N$ gilt.

Aufgabe 7: (Un-)gleichungen (a ein Kreuz, b ein Kreuz)

Zeige für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ folgende Relationen:

a) i) $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow a > 0, b > 0$ oder $a < 0, b < 0$.
   ii) Sei $a, b, c, d > 0$. Aus $a > b$ und $c > d$ folgt $a \cdot c > b \cdot d$.
   iii) $a \leq |a|$.

b) i) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
   ii) Aus $a < b$ folgt $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Bitte wenden!

Aufgabe 8: Finde den Fehler (a ein Kreuz, b ein Kreuz)

a) Warum ist der folgende „Beweis" für die Gleichung $2 = 1$ falsch?

$$\begin{aligned} a &= b \\ \Rightarrow a^2 &= ab \\ \Rightarrow a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\ \Rightarrow (a+b)(a-b) &= b(a-b) \\ \Rightarrow a + b &= b \\ \Rightarrow 2b &= b \\ \Rightarrow 2 &= 1. \end{aligned}$$

b) Wo genau liegt der Fehler in folgendem „Induktionsbeweis"?

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $2 \cdot n = 0$.
Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $2 \cdot n = 2 \cdot 0 = 0$.
Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für alle $k \leq n$, also $2 \cdot k = 0 \ \ \forall k \leq n$.
Induktionsschritt: Für $k = n + 1$ gilt $k = a + b$ für zwei natürliche Zahlen $a, b \leq n$. Also ist $2 \cdot (n + 1) = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 0 + 0 = 0$.