Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 3

Aufgabe 9: Induktionsbeweise ($\{a\}, \{b\}$ je ein $\times$)

Zeige mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}_0$:

a) Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \qquad \text{(Geometrische Summenformel)}$$

Was ergibt sich für $n \to \infty$?

b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}. \qquad \text{(Binomische Formel)}$$

Aufgabe 10: Komplexe Zahlen ($\{a, b\}, \{c\}$ je ein $\times$)

a) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit Realteil x und Imaginärteil y, also $z = x + \mathrm{i}y$. Zeige, dass gilt

i) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$,

ii) $\operatorname{Re} z = (z + \overline{z})/2, \quad \operatorname{Im} z = (z - \overline{z})/(2\mathrm{i})$,

iii) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$,

b) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$. Zeige, dass gilt

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\, \overline{z_2}$,

ii) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

iii) $z_1/z_2 = (z_1 \overline{z_2})/|z_2|^2$.

c) Berechne Realteil, Imaginärteil und Betrag von

$$z = \frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} + \frac{2-\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}.$$

Aufgabe 11: Potenzgesetze ($\{a, b\}, \{c, d\}$ je ein $\times$)

a) Seien $x, y > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass

$$x^r x^s = x^{r+s}, \quad \frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}, \quad (x^r)^s = x^{rs}, \quad x^r y^r = (xy)^r, \quad \frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r.$$

b) Seien $x, y > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad x^n < y^n.$$

Hinweis: Zeige zunächst die „$\Rightarrow$“-Richtung mit Hilfe vollständiger Induktion. Folgere daraus direkt die „$\Leftarrow$“-Richtung, indem du folgende Aussagenlogik-Relation verwendest: Sind A, B Aussagen mit dazugehörigen Negationen $\neg A, \neg B$. Dann ist $A \Rightarrow B$ äquivalent zu $\neg B \Rightarrow \neg A$.

c) Seien $x, y > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^r < y^r, \text{ falls } r > 0 \\ x^r > y^r, \text{ falls } r < 0 \end{cases}.$$

Hinweis: Benutze den Aufgabenteil b).

d) Seien Seien $x > 0$ und $s, t \in \mathbb{Q}$ mit $s < t$. Zeige, dass

$$x^s < x^t \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$$

und

$$x^s > x^t \quad \Leftrightarrow \quad x < 1.$$

Hinweis: Benutze den Aufgabenteil c) mit $r := t - s > 0$ und $y := 1$.

Aufgabe 12: Vektorraum-Axiome (Ein $\times$)

Sei das Tripel $(\mathbb{R}^2, +, *)$ definiert durch die Menge

$$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

die Addition

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

sowie der Multiplikation (für $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\alpha * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\cdot$ für die übliche Multiplikation in $\mathbb{R}$ steht.

Untersuche, ob es sich hierbei um einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ handelt. Überprüfe hierfür, ob sämtliche Vektorraum-Axiome erfüllt sind.