1 Wiederholung

1. Wann sind Vektoren eines Vektorraums linear unabhängig?
2. Was versteht man unter einem Erzeugendensystem, was unter einer Basis?
3. Was versteht man unter einer linearen Abbildung?
4. Was besagen Basisauswahl- und Basisergänzungssatz?
5. Was besagt die Dimensionsformel für lineare Abbildungen?
6. Was versteht man unter einem Basiswechsel?
7. Wie bestimmt man den Rang einer Matrix? Wann ist eine Matrix invertierbar? Wie bestimmt man ggf. ihre Inverse?
8. Was versteht man unter einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ für ein $x_0 \in A \subset X$?
9. Wann nennt man $x_0 \in X$ Häufungspunkt der Menge $A \subset X$, wann inneren Punkt?
10. Wie sind Abschluss, Inneres und Rand einer Menge $A \subset X$ definiert? Wann heißt eine Menge offen, wann abgeschlossen?
11. Wann nennt man eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt?
12. Wann heißt eine Funktion $f : A \to B$ stetig, wann gleichmäßig stetig auf A?
13. Sei $f : D \to Y \subset \mathbb{R}^n$. Wann nennt man w den Grenzwert von f für $x \to x_0 \in \overline{D}$?
14. Was bedeutet es, wenn eine Funktionenfolge punktweise/gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergiert?
15. Was besagt der Banach'sche Fixpunktsatz?

2 Übungsaufgaben

1. Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.
   a) Zeige, dass f genau dann injektiv ist, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathbb{1}_X$ gibt.
   b) Wie lautet das analoge Kriterium für surjektives f? Beweise dieses.
2. Gegeben sei die Funktion
$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < \sqrt{2} \\ 1 & \text{für } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$
   Ist f stetig?
3. Sei $A \subset X$. Zeige, dass $x \in X$ genau dann ein Häufungspunkt von A ist, wenn es eine Folge (x_n) in $A \backslash \{x\}$ gibt mit $x_n \longrightarrow x$.

4. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   a) Bestimme eine Basis $\mathcal{B} = (v, w)$ des $\mathbb{R}^2$, wobei v und w durch Multiplikation mit A auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet werden sollen.
   b) Bestimme die Matrix T, welche die Koordinatendarstellung eines Vektors bzgl. $\mathcal{B}$ in die bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{K}$ überführt. Bestimme dann die Matrix D so, dass $A = T D T^{-1}$.
   c) Berechne die einzelnen Komponenten der Matrix A^n in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.
   d) Beweise das Ergebnis aus 4c zur Kontrolle durch vollständige Induktion.

5. Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$ linear mit $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$.
   a) Zeige, dass es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung $\|Ax\| \leq C \,\|x\|$ gilt.
   b) Zeige, dass L stetig ist.

6. Sei $b \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ a & 1 & a \\ b & a & b \end{pmatrix}$$
   invertierbar?

7. Berechne das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit sich selbst.

8. Zeige, dass das Innere $\mathring{A}$ einer Menge $A \subset X$ gleich der Vereinigung aller offenen Teilmengen von A ist.

9. Zeige mithilfe der Definitionen, dass offene Intervalle offene Mengen und abgeschlossene Intervalle abgeschlossene Mengen sind.

10. Finde eine Folge (A_n) nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass aber $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

11. Es sei $D : \mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{(2)} \to \mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{(1)}, p \mapsto p'$ der Ableitungsoperator. Seien ferner $\mathcal{A} = (x, 1 - x, x^2)$ und $\mathcal{B} = (x + 1, x - 1)$ Basen des jeweiligen Polynomraums.
   a) Bestimme die darstellende Matrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(D)$ des Ableitungsoperators bezüglich der Startbasis $\mathcal{A}$ und der Zielbasis $\mathcal{B}$.
   b) Bestimme die Koordinatendarstellungen $a \in \mathbb{R}^3$ von $p(x) = 2x^2 - x + 1$ bezüglich $\mathcal{A}$ und $b \in \mathbb{R}^2$ von $p'(x)$ bezüglich $\mathcal{B}$.
   c) Verifiziere $b = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(D)\, a$.

12. Die Menge $V = \operatorname{span}\{\sin(x), \cos(x), 1\}$ ist ein Unterraum der auf $\mathbb{R}$ stetigen und reellwertigen Funktionen.
   a) Zeige, dass $\dim(V) = 3$.
   b) Betrachte die lineare Abbildung $L : V \to V, f \mapsto f'$. Bestimme Kern und Bild von L und verifiziere die Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

13. Sei $A \subset X$. Zeige, dass ∂A abgeschlossen ist.

14. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer, offen und abgeschlossen. Zeige, dass $M = \mathbb{R}$.

15. Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^n-1}{x-1}$. Zeige, dass $\lim_{x\to 1} f(x) = n$.

16. Sei X ein kompakter normierter Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig.
    a) Zeige, dass die Menge aller Funktionswerte von f beschränkt ist: Nimm an, f wäre unbeschränkt und konstruiere eine konvergente Urbildfolge, deren Bildfolge aber divergiert.
    b) Zeige, dass f sein Supremum annimmt: Ist $s := \sup f(X)$, so ist z.B. $s - 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ keine obere Schranke von $f(X)$ – konstruiere hiermit eine Urbildfolge, deren Bildfolge gegen s konvergiert; verwende dann die Kompaktheit von X.

17. Gegeben sei die Menge $M = \{\circ, \square, \triangle\}$ sowie die Verknüpfungen $+ : M \times M \to M$ und $\cdot : M \times M \to M$, von denen Folgendes bekannt ist:

$+$	$\circ$	$\square$	$\triangle$
$\circ$	?	$\circ$	$\square$
$\square$	$\circ$	?	?
$\triangle$	$\square$	?	?

$\cdot$	$\circ$	$\square$	$\triangle$
$\circ$	?	?	$\circ$
$\square$	?	?	$\square$
$\triangle$	$\circ$	$\square$	?

    a) Vervollständige die Verknüpfungstabellen so, dass $(M, +, \cdot)$ ein Körper ist.
    b) Gib die Neutralelemente von Addition und Multiplikation an.
    c) Berechne $\circ^{-1} - \triangle$.

18. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x+1}$. Zeige mittels Definition der Stetigkeit, dass f im Punkt $x_0 = 1$ stetig ist.

19. Gegeben sei der normierte Raum $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Ferner sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

    gegeben. Zeige, dass der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar ist und f somit genau einen Fixpunkt besitzt.

20. Gegeben seien die Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) mit $f_n : [0,1] \to [0,1], x \mapsto x^n$ und

$$g_n : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto \begin{cases} x/n & \text{für } x \neq 1 \\ 1 - 1/n & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

    Zeige, dass (f_n) und (g_n) punktweise gegen dieselbe Grenzfunktion konvergieren. Ist die Konvergenz jeweils gleichmäßig?