Mathematik für Physiker I

Lösung Test 1

Aufgabe 1:

a) $\underline{n=0}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k} = 1 = 2^0.$

$\underline{n \to n+1}$: Wir dürfen die Definition $\binom{n}{k} = 0$, falls $k < 0$ oder $k > n$ verwenden, ohne dass die Relation $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ ihre Gültigkeit verliert. Damit gilt nun

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1},$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $\binom{n}{n+1} = \binom{n}{-1} = 0$. Wir shiften jetzt die Summationsvariable k in der 2. Summe um 1, via $l = k-1$ und erhalten

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

wobei im vorletzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde.

b) Die Ungleichung $2^n > n^2$ ist zwar wahr für $n = 0$ und $n = 1$, verliert aber ihre Gültigkeit für $n = 2, 3, 4$. Sie ist erst wieder wahr für $n = 5$ und wir behaupten, dass $N = 5$ die gesuchte Zahl ist und für alle $n \geq N = 5$ die Ungleichung gilt. Dies beweisen wir wieder per vollständiger Induktion nach n:

$\underline{n=5}$: Ist klar, da $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

$\underline{n \to n+1}$: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{Induktionsannahme}}{>} 2n^2 = (n+1)^2 + 2n^2 - (n+1)^2 = (n+1)^2 + n^2 - 2n - 1 = (n+1)^2 + (n-1)^2 - 2$. Ab $n = 3$ ist $(n-1)^2 - 2 > 0$, insbesondere auch für alle $n \geq 5$. Dies beendet den Induktionsschritt.

Aufgabe 2:

a) Es gilt:

$$(1 \pm \mathrm{i})^2 = 1 \pm 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 1 \pm 2\mathrm{i} + (-1) = \pm 2\mathrm{i}$$

und somit

$$(1+\mathrm{i})^4 + (1-\mathrm{i})^4 = \big((1+\mathrm{i})^2\big)^2 + \big((1+\mathrm{i})^2\big)^2 = (2\mathrm{i})^2 + \big(-2\mathrm{i})^2 = -4 + (-4) = -8,$$

also

$$\mathrm{Re}\big((1+\mathrm{i})^4 + (1-\mathrm{i})^4\big) = -8 \quad , \quad \mathrm{Im}\big((1+\mathrm{i})^4 + (1-\mathrm{i})^4\big) = 0 \ .$$

b) Es gilt für $z = x + \mathrm{i}y$:

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} &= \frac{z+1}{z-1}\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}-1} = \frac{|z|^2 - z + \bar{z} - 1}{|z|^2 - z - \bar{z} + 1} \\
&= \frac{|z|^2 - (z - \bar{z}) - 1}{|z|^2 - (z + \bar{z}) + 1} = \frac{|z|^2 - 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) - 1}{|z|^2 - 2\mathrm{Re}(z) + 1} \\
&= \frac{x^2 + y^2 - 2\mathrm{i}y - 1}{x^2 + y^2 - 2x + 1} = \frac{(x^2 + y^2 - 1) + \mathrm{i}(-2y)}{(x-1)^2 + y^2},
\end{aligned}$$

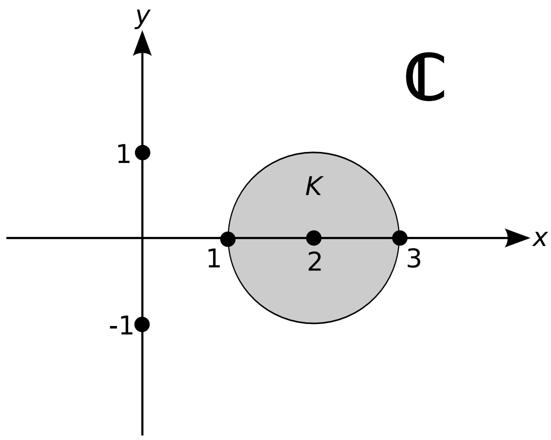
also

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}\quad,\quad \mathrm{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=-\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}.$$

i) Es gilt:

$$\begin{aligned}
K&=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\geq 2\right\}=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}\geq 2\right\}\\
&=\left\{z\in\mathbb{C}\big|\;x^2+y^2-1\geq 2\big((x-1)^2+y^2\big)\right\}=\{z\in\mathbb{C}|\;x^2+y^2-1\geq 2x^2-4x+2+2y^2\}\\
&=\{z\in\mathbb{C}|\;-1\geq x^2-4x+2+y^2\}=\{z\in\mathbb{C}|\;1\geq x^2-4x+4+y^2\}\\
&=\left\{z\in\mathbb{C}\big|1\geq (x-2)^2+y^2\right\}\;.
\end{aligned}$$

ii) Die Menge K stellt die Kreisfläche um $z=2$ ($x=2$, $y=0$) mit Radius 1 in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ dar:



Aufgabe 3:

a) Gegeben sei die Folge (a_n) mit den Folgengliedern

$$a_n=\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-\tfrac{n}{2}}.$$

Umformungen führen zunächst auf folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
a_n=\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-\tfrac{n}{2}}&=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}}\\
&=\frac{n^2+n-\left(n^2-\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}}\\
&=\frac{\frac{3}{2}n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}}\\
&=\frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{2n}}}
\end{aligned}$$

Der Nenner konvergiert für $n\to\infty$ nun offensichtlich gegen $\sqrt{1}+\sqrt{1}=2$, weswegen

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{4}.$$

b) Gegeben sei nun die rekursiv definierte Folge

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 5)$$

mit dem Startwert $a_1 = 0$.

- (a_n) ist nach oben durch 5 beschränkt, d.h. $a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
  i) Induktionsanfang für $n = 1$. Offenbar ist $a_1 = 0 \leq 5$ wahr.
  ii) Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$. Sei $a_n \leq 5$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{2} \leq \frac{5+5}{2} = 5.$$

- (a_n) ist (streng) monoton steigend, d.h. $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
  i) Induktionsanfang für $n = 1$. Offenbar ist $a_1 = 0 < \frac{5}{2} = a_2$ wahr.
  ii) Induktionssschritt $n \rightsquigarrow n+1$. Sei $a_{n+1} > a_n$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 5}{2} > \frac{a_n + 5}{2} = a_{n+1}.$$

Also ist die Folge (a_n) konvergent. Der Fixpunkt ist gegeben durch $a = \frac{1}{2}(a+5) \Leftrightarrow a = 5$. Damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 5.$$

c) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge

$$a_{n+1} = 3(a_n - 4)$$

mit dem Startwert $a_1 = 0$. Ab $n = 2$ ist a_n negativ und divergiert daher gegen $-\infty$ (Argumentation bis hierhin ausreichend). Es gilt bspw. $a_n < -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

i) Induktionsanfang für $n = 2$. Es gilt $a_2 = -12 < -2$.
ii) Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$. Gelte $a_n < -n$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann folgt

$$a_{n+1} = 3a_n - 12 < 3a_n < 3\,(-n) < -n.$$

d) Gegeben sei schließlich die rekursiv definierte Folge

$$a_{n+1} = 3(a_n - 4)$$

mit dem Startwert $a_1 = 6$. Offenbar gilt $a_n = 6$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 6.$$

Aufgabe 4:

a) Die Menge A_1 ist nicht beschränkt und daher existiert (in $\mathbb{R}$) kein Supremum und damit auch kein Maximum. Auch die Schreibweise $\sup A_1 = \infty$ ist zulässig. Das Infimum der Menge ist $z = \inf A_1 = -\sqrt{2}$, wie man leicht sieht: Es gilt $z^2 = 2$ und für alle $a_1 \in A_1$ ist stets $a_1^2 < 2$ (oder $a_1 > 3$). Daher wird das Infimum auch nicht angenommen, es existiert kein Minimum.

b) Die Folge $(-1)^n(1-1/n)$ hat die Häufungspunkte ± 1 und den Wertebereich im Intervall $(-1, 1)$. Also sind $\sup A_2 = 1$ und $\inf A_2 = -1$; Maximum und Minimum existieren nicht.

c) Der Wertebereich von $1/n + 1/m$ ist $(0, 2]$, denn für $n = m = 1$ ergibt sich $1/n + 1/m = 2$ und für große n, m kommt $1/n + 1/m$ der Null beliebig nahe. Daher ist $\sup A_3 = \max A_3 = 2$ und $\inf A_3 = 0$. Das Minimum existiert nicht.

d) Für $1/n - 1/m$ haben wir als Wertebereich $(-1, 1)$. Für $n = 1$ konvergiert $1 - 1/m$ für $m \to \infty$ gegen 1 und für $m = 1$ konvergiert $1/n - 1$ für $n \to \infty$ gegen -1. Also gilt $\sup A_4 = 1$ und $\inf A_4 = -1$. Diese werden nicht angenommen, d.h. Minimum und Maximum existieren nicht.

Aufgabe 5:

Angenommen das wäre nicht so, also $a > 0$. Zusätzlich gilt aber immer noch $0 \leq a < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Wähle nun $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Dann ist $0 \leq a < \frac{a}{2}$. Wir haben also einen Widerspruch kontruiert. Die Annahme ist falsch und ihr Gegenteil (das was zu zeigen ist) ist richtig.

Aufgabe 6:

$\underline{\Rightarrow}$: Dies ist trivial, da jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar gegen x konvergiert und somit jede Teilfolge jeder Teilfolge bereits gegen x konvergtiert.

$\underline{\Leftarrow}$: Nehme an, die Folge konvergiert nicht gegen x. Das heisst es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \geq k$ existiert, so dass $\|x - x_{n_k}\| > \varepsilon$. In anderen Worten, es existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, mit $\|x - x_{n_k}\| > \varepsilon$ (dies ist eine äquivalente Formulierung). Jede Teilfolge dieser Teilfolge erbt diese Eigenschaft und konvergiert somit nicht gegen x. Das heisst, dass die Negation der linken Aussage die Negation der rechten Aussage impliziert und somit die linke Aussage aus der rechten folgt.

Aufgabe 7:

a) Bezeichne mit $(\widetilde{G2})$ die Eigenschaft von $\tilde{e} \in G$, dass $\tilde{e} \circ g = g$ für alle $g \in G$. Dann gilt

$$\tilde{e} \stackrel{(G2)}{=} \tilde{e} \circ e \stackrel{(\widetilde{G2})}{=} e.$$

b) $(g^{-1})^{-1} \stackrel{(G2)}{=} (g^{-1})^{-1} \circ e \stackrel{(G3)}{=} (g^{-1})^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \stackrel{(G1)}{=} ((g^{-1})^{-1} \circ g^{-1}) \circ g \stackrel{(G3)}{=} e \circ g \stackrel{(G2)}{=} g.$

c) $g \circ g^{-1} \stackrel{b)}{=} (g^{-1})^{-1} \circ g^{-1} \stackrel{(G3)}{=} e.$

d) Bezeichne mit $(\widetilde{G3})$ die Eigenschaft von $\tilde{g}, g \in G$, dass $\tilde{g} \circ g = e$. Dann gilt

$$\tilde{g} \stackrel{(G2)}{=} \tilde{g} \circ e \stackrel{c)}{=} \tilde{g} \circ (g \circ g^{-1}) \stackrel{(G1)}{=} (\tilde{g} \circ g) \circ g^{-1} \stackrel{(\widetilde{G3})}{=} e \circ g^{-1} \stackrel{(G2)}{=} g^{-1}.$$

e) $(h^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ h) \stackrel{(G1)}{=} ((h^{-1} \circ g^{-1}) \circ g) \circ h \stackrel{(G1)}{=} (h^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)) \circ h \stackrel{(G3)}{=} (h^{-1} \circ e) \circ h \stackrel{(G2)}{=} h^{-1} \circ h \stackrel{(G3)}{=} e.$
Aus der Eindeutigkeit der Inversen d) folgt nun $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$.