Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Wintersemester 2012/2013
C. Hainzl

Mathematik für Physiker I

Test 1

Name

Vorname

Matrikelnr.

Bitte verwende diese Seite als Deckblatt deiner Arbeit, und lasse die untenstehende Tabelle zur späteren Bewertung frei.

Aufgabe	maximale Punkte	erzielte Punkte
1	12	
2	10	
3	12	
4	6	
5	6	
6	8	
7	6	
Total	60	

Hinweise

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Bitte beachte folgende Punkte:

- Trage **jetzt** deinen Namen in das Deckblatt ein und gib es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt deiner Arbeit ab.
- Der Herleitungsweg von Resultaten muss übersichtlich und vollständig sein. Die Antworten müssen begründet werden.

Aufgabe 1: (12P)

Zeige mittels vollständiger Induktion, dass:

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

b) Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $2^n > n^2$ für alle $n \geq N$.

Aufgabe 2: (10P)

a) Berechne den Real- und Imaginärteil von $(1+i)^4 + (1-i)^4$.

b) Sei $z = x + iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Berechne den Real- und Imaginärteil von $\frac{z+1}{z-1}$.

   i) Sei $K = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(\frac{z+1}{z-1}) \geq 2\}$. Zeige, dass $K = \{x + iy \in \mathbb{C} | (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$.

   ii) Skizziere die Menge K in der Ebene.

Aufgabe 3: (12P)

Untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Limes:

a) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - \frac{n}{2}}$.

b) $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 5)$, $a_1 = 0$.

c) $a_{n+1} = 3(a_n - 4)$, $a_1 = 0$.

d) $a_{n+1} = 3(a_n - 4)$, $a_1 = 6$.

Aufgabe 4: (6P)

Bestimme inf und sup in $\mathbb{R}$ der folgenden Mengen und gebe an, ob das Infimum und Supremum in der jeweiligen Menge enthalten ist (d.h. ob Minimum und Maximum existieren):

a) $A_1 = \{x \in \mathbb{R} | x > 3 \text{ oder } x^2 < 2\}$.

b) $A_2 = \{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}) \in \mathbb{R} | n \in \mathbb{N}\}$.

c) $A_3 = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \in \mathbb{R} | n, m \in \mathbb{N}\}$.

d) $A_4 = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \in \mathbb{R} | n, m \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 5: (6P)

Sei $a \in \mathbb{R}$. Beweise die folgende Aussage:
Falls a für alle $\varepsilon > 0$ der Abschätzung $0 \leq a < \varepsilon$ genügt, so gilt $a = 0$.

Aufgabe 6: (8P)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$. Beweise folgende Aussage:

$$x_n \to x \Leftrightarrow \text{ Jede Teilfolge } (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ von } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ hat eine Teilfolge, die gegen } x \text{ konvergiert.}$$

Aufgabe 7: (6P)

Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \circ)$, wobei G eine Menge ist und $\circ$ eine Abbildung

$$\circ : G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto g \circ h,$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(G1) Für alle $g, h, k \in G$ gilt $(g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k)$ (Assoziativgesetz).

(G2) Es gibt ein Element $e \in G$, sodass $g \circ e = e \circ g = g$ für alle $g \in G$ (neutrales Element).

(G3) Für alle $g \in G$ existiert ein Element g^{-1}, sodass $g^{-1} \circ g = e$ (Linksinverse).

Achtung: Das Kommutativgesetz $g \circ h = h \circ g$ gilt hier nicht.

Zeige unter Angabe des jeweiligen Gruppenaxioms (G1),(G2),(G3) über jedem Gleichheitszeichen (jede Anwendung der Axiome muss explizit angegeben werden):

a) Das neutrale Element e ist eindeutig, d.h. für $\tilde{e} \in G$ mit der Eigenschaft $g \circ \tilde{e} = \tilde{e} \circ g = g$ für alle $g \in G$ folgt, dass $\tilde{e} = e$.

b) Für $g \in G$ gilt $(g^{-1})^{-1} = g$.

c) Die Linksinverse ist gleichzeitig Rechtsinverse, d.h. $g \circ g^{-1} = e$
Hinweis: Verwende Teilaufgabe b).

d) Die Inverse ist eindeutig, d.h. für $\tilde{g}, g \in G$ mit $\tilde{g} \circ g = e$ gilt $\tilde{g} = g^{-1}$.

e) Für $g, h \in G$ gilt $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$.