Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

WS 2012/13
09.02.2013

Klausur zu „Mathematik für Physiker 3“

1. Sei A die folgende reelle, symmetrische 2×2-Matrix:
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$
   a) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.
   b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenräume von A.
   c) (1 Punkt) geben Sie eine orthogonale 2×2-Matrix S an, so dass SAS^{-1} diagonal ist.

2. a) (2 Punkte) Führen Sie an folgender Basis $\mathfrak{a} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$ das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt aus, um so eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bzgl. des kanonischen Skalarproduktes zu erhalten:
$$v_1 = (1, 1, 0)\,, \quad v_2 = (1, 0, 1)\,, \quad v_3 = (0, 1, 1)\,.$$
   b) (2 Punkte) Betrachten Sie den Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $I = [0, 2\pi]$ mit dem Skalarprodukt
$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$
   und darin den Unterraum U, der von den Elementen $f, g : I \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = 1 \quad \text{und} \quad g(x) = \sin x$$
   aufgespannt wird. Orthonormalisieren Sie die Basis (f, g) von U. (Hinweis: $\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$.)

3. a) (2 Punkte) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind kompakt (bzgl. der Euklidischen Metrik) und welche nicht? Begründen Sie.
$$\Delta_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
$$\Delta_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\; x^3 + y^3 \leq 1\right\}.$$
   b) (2 Punkte) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie: Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, so dass jedes $x \in X$ Häufungspunkt dieser Folge ist. (Hinweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\bigcup\limits_{x\in X} \left\{y \in X; d(x, y) < \frac{1}{n}\right\}$ eine offene Überdeckung von X.)

4. Betrachten Sie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}.$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 2 von f im Entwicklungspunkt $(0,0)$.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass f kein lokales Extremum besitzt.

Die Klausur ist mit 8 Punkten bestanden.

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!