Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

WS 2012/13
08.04.2013

Nachklausur
„Mathematik für Physiker 3“

1. (a) (2P) Warum ist die folgende 2×2-Matrix A über $\mathbb{C}$ nicht diagonalisierbar:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

(b) (2P) Warum ist die folgende 2×2-Matrix B über $\mathbb{R}$ nicht, über $\mathbb{C}$ aber wohl diagonalisierbar:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

2. Geben Sie (mit Begründung) ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ an, die

(a) (1P) abgeschlossen, aber nicht beschränkt ist,

(b) (1P) beschränkt, aber nicht abgeschlossen ist,

(c) (1P) weder abgeschlossen noch beschränkt ist,

(d) (1P) beschränkt und abzählbar ist, aber nicht kompakt.

3. (a) (2P) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\Delta(fg) = \Delta(f)g + 2\langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) \rangle + f\Delta(g).$$

(b) (2P) Geben Sie für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ (wenigstens für kleine k) eine Polynomfunktion $f_k \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vom Grad k an, die harmonisch ist, $\Delta(f_k) = 0$.

4. Betrachten Sie $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $F(x, y) = y^2 - x^3$.

(a) (1P) Geben Sie alle Punkte $(x_0, y_0) \in C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ an, wo man die Gleichung $F(x, y) = 0$ lokal um (x_0, y_0) nach y auflösen kann und begründen Sie.

(b) (2P) Warum kann man $F(x, y) = 0$ lokal um $(x_0, y_0) = (0, 0)$ nicht nach y auflösen?

(c) (1P) Skizzieren Sie die Kurve $C \subseteq \mathbb{R}^2$.