Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

WS 2012/13
18.01.2013
Blatt 12

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3“

1. (4 Punkte)

   a) Sei $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ y > 0\}$ und $f : G \to \mathbb{R}$ gegeben durch
   $$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$
   Bestimmen Sie dass Taylor-Polynom vom Grad 2 im Punkt $(1, 1)$.

   b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
   $$f(x, y) = (4x^2 + y^2)\mathrm{e}^{x^2+4y^2},$$
   genau ein lokales Minimum hat.

2. (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und homogen vom Grad 2. Das heißt: $f(tx) = t^2 f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$. Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ existiert mit $f(x) = x^t Ax$.

3. (4 Punkte) Sei $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ ein reelles Polynom in n Veränderlichen ($n \in \mathbb{N}$) und $f_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die zugehörige Polynomfunktion. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $P \to f_P$ injektiv ist. (Hinweis: Betrachte $D^\alpha f_p(0)$).

4. (4 Punkte) Sei $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen und $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen. Identifizieren Sie $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ und $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ und betrachten Sie die Abbildung $F : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ gegeben durch $F(A) = A^t A$ (A^t transponierte Matrix zu A). Zeigen Sie, dass das Differential von F in einem Punkt $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ gegeben ist durch $DF(A) : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$,
   $$DF(A)B = B^t A + A^t B.$$

Abgabe: Freitag, 18.01.2013, 11 Uhr in der Vorlesung