Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

WS 2012/13
25.01.2013
Blatt 13

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3"

1. (4 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to y^2 - x^2(x + 1)$.
   a) Machen Sie eine Skizze der Kurve $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ F(x, y) = 0\}$.
   b) Um welche Punkte $(x, y) \in C$ kann man die implizite Gleichung $F(x, y) = 0$ nach x auflösen, wo nach y und wo kann man sie nicht lokal nach x oder y auflösen?
2. (4 Punkte) Sei $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $f : G \to G$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Zeigen Sie, dass $DF(x, y)$ invertierbar ist, für alle $(x, y) \in G$, aber f kein Diffeomorphismus von G auf G ist. (Hinweis: Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist.)
3. (4 Punkte)
   a) Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ und $D \subset \mathbb{R}^m$ Gebiete. Sei $f : G \to D$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie: $n = m$. (Hinweis: Betrachte $Df(x)$ für ein $x \in G$.)
   b) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in G$. Zeigen Sie, dass $D := f(G) \subset \mathbb{R}^n$ wieder ein Gebiet ist. (Hinweis: Umkehrsatz)
4. (4 Punkte)
   a) Sei $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein reelles Polynom und sei λ eine einfache Nullstelle. Zeigen Sie:
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T} P(\lambda) \neq 0.$$
   b) Sei $M : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ stetig differenzierbar. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und λ_0 ein einfacher Eigenwert von $M(t_0)$. Zeigen Sie: Es existiert ein offenes Intervall I mit $t_0 \in I$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\lambda : I \to \mathbb{R}$, so dass $\lambda(t_0) = \lambda_0$ und $\lambda(t)$ für alle $t \in I$ ein Eigenwert von $M(t)$ ist.

Abgabe: Freitag, 01.02.2013, 11 Uhr in der Vorlesung