Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

WS 2012/13
02.11.2012
Blatt 3

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3“

1. (4 Punkte) Sei
$$A = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 & 2 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} & -2 \\ 1 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}).$$
Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie ein $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, so dass SAS^{-1} diagonal ist.

2. (4 Punkte)

   a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und
$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}).$$
Zeigen Sie, dass die Polynomfunktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch $p(\lambda) := \det(A(\lambda))$ gegeben ist durch
$$p(\lambda) = \sum_{l=0}^{n} a_l \lambda^l, \; a_n := 1.$$

   b) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jedes normierte Polynom $P \in \mathbb{K}[T]$ der Ordnung n charakteristisches Polynom einer geeigneten Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ ist.

3. (4 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ idempotent, d.h. $A^2 = A$, mit Rang $\mathrm{rg}(A) = r$. Wir definieren $A^\perp := E_n - A$.

   a) Zeigen Sie, dass $A^\perp$ idempotent ist und es gilt $A^\perp A = AA^\perp = \mathbf{0}$.

   b) Sei $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definiert durch $f_A(\boldsymbol{x}) := A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ und $f_{A^\perp}$ analog definiert. Zeigen Sie,
$$\mathbb{K}^n = \mathrm{im}\, f_{A^\perp} \oplus \mathrm{im}\, f_A.$$

   c) Zeigen Sie, dass die einzig möglichen Eigenwerte für A und $A^\perp$ gegeben sind durch $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ und es gilt:
$$\ker f_A = \mathrm{im}\, f_{A^\perp} \quad \text{und} \quad \ker f_{A^\perp} = \mathrm{im}\, f_A.$$

d) Zeigen Sie, dass A und $A^\perp$ diagonalisierbar sind und die charakteristischen Polynome sind gegeben durch:

$$P_A(T) = (T-1)^r T^{n-r}, \quad P_{A^\perp}(T) = (T-1)^{n-r} T^r.$$

4. (4 Punkte) (Polarisierungsformel)

a) Sei $s : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf einem reellen Vektorraum V. Man nennt dann $q : V \to \mathbb{R}$, $q(v) := s(v; v)$, die zugehörige quadratische Form. Zeigen Sie, dass man s aus q wie folgt zurück gewinnen kann:

$$s(v; w) = \frac{1}{4}(q(v+w) - q(v-w)).$$

b) Können Sie das auch für Hermitesche Formen? (Hinweis: Erweitern Sie geeignet mit $\pm \mathrm{i} q(v \pm \mathrm{i} w)$).

Abgabe: Freitag, 09.11.2012, 11 Uhr in der Vorlesung