Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

WS 2012/13
09.11.2012
Blatt 4

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3“

1. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $A \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ positiv definit ist, nicht aber $B \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (4 Punkte) (Satz des Pythagoras) Seien v, w, u paarweise verschiedene Vektoren in einem euklidischen Vektorraum mit zugehöriger Metrik d, weiter $a = d(w; u)$, $b = d(u; v)$, $c = d(v; w)$ und $\phi = \angle(v - u; w - u) \in [0; \pi]$. Zeigen Sie den Satz des Pythagoras (und seine Umkehrung): $\phi = \frac{\pi}{2}$, genau wenn $a^2 + b^2 = c^2$ ist.

3. (4 Punkte) Sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum aus Aufg. 3, Blatt 2, und $f_k \in V$ gegeben durch $f_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass gilt:
$$\langle f_k, f_l \rangle = \delta_{kl}.$$

4. (4 Punkte) Sei V ein $\mathbb{K}$-VR und $\mathfrak{a} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis. Sie $\mathfrak{a}^* = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n)$ die zu $\mathfrak{a}$ duale Basis von $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$, also $\lambda^i(v_j) = \delta_{ij}$. Für $\alpha, \beta \in V^*$ sei $\alpha \otimes \beta : V \times V \to \mathbb{K}$ folgende Bilinearform:
$$\alpha \otimes \beta(v, w) = \alpha(v)\beta(w).$$
Zeigen Sie, dass $(\lambda^i \otimes \lambda^j)_{1 \leq i,j \leq n}$ eine Basis von $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ ist, wobei $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ der Raum der Bilinearformen auf V ist. Bemerkung: Die Elemente von V heißen $(1,0)$-Tensoren, die von V^* $(0,1)$-Tensoren und die von $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ $(0,2)$-Tensoren bzgl. V. (Hinweis: Ist $A = M(s; \mathfrak{a}) \Rightarrow s = \sum_{i,j} a_{ij} \lambda^i \otimes \lambda^j$.)

Abgabe: Freitag, 16.11.2012, 11 Uhr in der Vorlesung