Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

WS 2012/13
14.12.2012
Blatt 9

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3“

1. (4 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

   a) Zeigen Sie für eine (partiell differenzierbare) Funktion f und ein (partiell differenzierbares) Vektorfeld v auf G:
   $$\operatorname{div}(fv) = \langle \operatorname{grad}(f), v \rangle + f \operatorname{div}(v).$$

   b) Zeigen sie für zweimal partiell differenzierbare Funktionen f und g auf G:
   $$\Delta(fg) = \Delta(f)g + 2\,\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g) \rangle + f\Delta(g).$$

2. (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0,0) = 0$ und
   $$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$
   für $(x,y) \neq (0,0)$. Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar (auf ganz $\mathbb{R}^2$) ist, aber unstetig in $(x,y) = (0,0)$.

3. (4 Punkte) (Lebesguesches Lemma) Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes X und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K. Man beweise: Es gibt eine Zahl $\lambda > 0$ mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Teilmenge $A \subset K$ mit $\operatorname{diam}(A) \leq \lambda$ existiert ein $i \in I$ mit $A \subset U_i$.

4. (4 Punkte) Sei $Y \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, die nicht kompakt ist. Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $f : Y \to \mathbb{R}$ gibt, die ihr Supremum nicht annimmt. (Hinweis: Untersuchen Sie die Fälle, wo Y nicht beschränkt bzw. nicht abgeschlossen ist, und betrachten Sie geeignete Abstandfunktionen.)

Abgabe: Freitag, 21.12.2012, 11 Uhr in der Vorlesung