Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

WS 2012/13
19.10.2012
Blatt 1

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3“

1. (4 Punkte) Sei $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$. Zeigen Sie:

   a) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, so gilt: $\mathrm{spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$.

   b) Die folgende Matrix A ist nicht diagonalisierbar:
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (4 Punkte) Sei K ein Körper, $K[T]$ der Polynomring über K und $R = \mathrm{Abb}(K, K)$ der Ring der Abbildungen von K nach K.

   a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : K[T] \to \mathrm{Abb}(K, K)$
   $$\Phi(p)(\lambda) = p(\lambda),$$
   ein Ringhomomorphismus ist.

   b) Zeigen Sie: Φ ist genau dann injektiv, wenn K unendlich viele Elemente hat.

   c) Das Bild von Φ besteht aus den Polynomfunktionen, $\mathrm{Pol}(K) := \mathrm{im}(\Phi)$. Zeigen Sie: Ist K endlich, so ist jede Abbildung $f : K \to K$ Polynomfunktion. (Hinweis: Interpolation)

3. (4 Punkte) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von folgender Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. (4 Punkte) Man nennt eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ <u>nilpotent</u>, wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^r = 0$.

   a) Sei $A = (a_{ij})$ eine <u>obere Dreiecksmatrix</u>, d.h.: $a_{ij} = 0$, für $j \leq i$. Zeigen Sie, dass A nilpotent ist.

   b) Zeigen Sie: Ist A nilpotent und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda = 0$. (Und umgekehrt: $\lambda = 0$ ist stets Eigenwert.)

   c) Zeigen Sie: Ist A nilpotent und diagonalisierbar, so ist $A = 0$.

Abgabe: Freitag, 26.10.2012, 9 Uhr in der Vorlesung