Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

WS 2012/13
11.01.2013
Blatt 11

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3“

1. (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch
$$f(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta).$$
Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f in jedem Punkt (r, ϑ, φ) und deren Determinante.

2. (4 Punkte) Zeigen Sie: Die Anzahl der Möglichkeiten eine k-elementige Menge M in n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ disjunkt zu zerlegen, so dass S_j gerade α_j Elemente hat ($j = 1, \ldots, n$), ist $k!/(\alpha_1! \ldots \alpha_n!)$. (Hinweis: Induktion über n.)

3. (4 Punkte) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $f(x) =: c$. Man zeige, dass der Gradient $\operatorname{grad} f(x)$ senkrecht auf der Niveaufläche
$$N_f(c) := \{y \in U;\ f(y) = c\}$$
senkrecht steht, d.h. folgendes gilt: Ist $\phi : (-\epsilon, \epsilon) : \mathbb{R}^n$, $(\epsilon > 0)$, eine beliebige stetig differenzierbare Kurve mit $\phi(0) = x$ und $\phi((-\epsilon, \epsilon)) \subset N_f(c)$ so folgt
$$\langle \phi'(0), \operatorname{grad} f(x) \rangle = 0.$$

4. (4 Punkte) Sei $\mathbb{S}^{n-1}$ die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ bezüglich der 1-Norm $\|x\| = \sum_{l=1}^{n} |x_l|$. Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei weitere Normen auf $\mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^2_+$ sei definiert durch
$$x \to \left(\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}, \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \right).$$
   a) Zeigen Sie, dass f für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ wohldefiniert ist, d.h. schließen Sie den Fall $\|x\|_1 = \|x\|_2 = 0$ aus.
   b) Zeigen Sie: Es exisitieren zwei Konstanten $a > 0$ und $b > 0$ mit
   $$\|x\|_1 \le a \|x\|, \quad \|x\|_2 \le b \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$
   c) Sei der Bildraum $\mathbb{R}^2$ von f mit der 1-Norm $\|\cdot\|$ ausgestattet. Zeigen Sie, $g : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ definiert durch $g(x) := \|f(x)\|$ nimmt sowohl ihr Supremum als auch ihr Infimum an.
   d) Schließen Sie daraus, dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind.

Abgabe: Freitag, 18.01.2013, 11 Uhr in der Vorlesung