Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

WS 2012/13
01.02.2013
Blatt 14

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3"

1. (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x^2 + y^2, \mathrm{e}^{xy})$.
   a) Bestimmen Sie alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, um die herum f ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist.
   b) Geben Sie möglichst große Gebiete $G, D \subset \mathbb{R}^2$ an, so dass $f(G) = D$ und $f : G \to D$ ein Diffeomorphismus ist.

2. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass der Umkehrsatz für $n = 1$ sogar in folgender globaler Variante gilt: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, für alle $x \in I$, so ist $J := f(I) \subset \mathbb{R}$ auch ein offenes Intervall und $f : I \to J$ ein Diffeomorphismus. (Hinweis: Wegen des Zwischenwertsatzes ist f streng monoton. Warum?)

3. (4 Punkte) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

4. (4 Punkte) Beweisen Sie den Satz über implizite Funktionen mit Hilfe des Umkehrsatzes. (Hinweis: Ist $F : G \to \mathbb{R}^m$ mit einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gegeben, so betrachten Sie die Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gegeben durch $\varphi(x, y) = (x, F(x, y))$.)

Viel Glück in der Klausur!